微分方程式　第 8 回演習

第 8 回演習問題：次の追加問題.(1)(2) のどちらか一方と，テキスト p.107 演習 2.2(1) を行って下さい．

(ヒント) p.107 演習 2.2(1) はこのプリント例題 1. を参考にせよ．追加問題はこのプリント裏面の例題 2. とテキスト p.96 例題 2.2 を参照せよ．

追加問題. [　] 内の関数が対応する同次方程式の特殊解である事を確かめ，階数低下法を用いて 次の微分方程式を解け．但し，$y = y(x)$.

(1)　$x^2y'' + xy' - 4y = 8x^2$　　　[x^2]　　　(2)　$xy'' + (2x+1)y' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$　　　[e^{-x}]

(答) (1) $y = x^2(2\log x + \frac{C_1}{x^4} + C_2)$　　(2) $y = e^{-x}(\frac{x^3}{3} + C_1 \log x + C_2)$　　　(C_1, C_2：任意定数)

例題 1. [　] 内の関数が対応する同次方程式の特殊解である事を確かめ，階数低下法を用いて 次の微分方程式を解け．但し，$y = y(x)$.

$$x^2y'' - xy' + y = 4x^5 \ \cdots ①\qquad [\, x \,]$$

(解答例) $y_0 = x$ とおく．$y_0' = x' = 1,\ y_0'' = 1' = 0$ より

$$x^2y_0'' - xy_0' + y_0 = x^2 \cdot 0 - x \cdot 1 + x = 0.$$

よって，$y_0 = x$ は ①に対応する同次方程式 $x^2y'' - xy' + y = 0$ の特殊解である．

　次に階数低下法により $y = y_0 \cdot u(x) = xu(x) \cdots ②$ とおいて ①を解く．以後簡単に $u = u(x)$ で表す．②より

$$y' = (xu)' = x'u + xu' = u + xu' \ \cdots ③,\qquad y'' = (y')' = u' + (x'u' + xu'') = 2u' + xu'' \ \cdots ④.$$

②③④を ①に代入して整理すると

$$① \Leftrightarrow\ x^2(2u' + xu'') - x(u + xu') + xu = 4x^5$$
$$\Leftrightarrow\ x^3u'' + x^2u' = 4x^5\ \Leftrightarrow\ u'' + \frac{1}{x}u' = 4x^2 \ \cdots ⑤\qquad (\leftarrow u\text{ の項が消える !})$$

ここで, $u' = v \cdots ⑥$ とおくと $u'' = v'$ より ⑤を書き直すと

$$⑤ \Leftrightarrow\ v' + \frac{1}{x}v = 4x^2 \ \cdots ⑦.$$

⑦は v の 1 階線形微分方程式だから 解の公式 (テキスト p.40) を用いて 解くと

$$v = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int (4x^2)e^{\int \frac{1}{x}dx}\,dx + C_1\right)$$
$$= e^{-\log x}\left(\int (4x^2)e^{\log x}\,dx + C_1\right) = \frac{1}{x}\left(\int (4x^2)x\,dx + C_1\right)$$
$$= \frac{1}{x}\left(\int 4x^3\,dx + C_1\right) = \frac{1}{x}(4 \cdot \frac{x^4}{4} + C_1) = x^3 + \frac{C_1}{x} \ \cdots ⑧$$

⑥⑧より

$$u' = x^3 + \frac{C_1}{x},\qquad \therefore\ u = \int u'\,dx = \int (x^3 + \frac{C_1}{x})dx = \frac{x^4}{4} + C_1\log x + C_2 \ \cdots ⑨$$

②⑨より

$$y = xu = x(\frac{x^4}{4} + C_1\log x + C_2) = \frac{x^5}{4} + C_1x\log x + C_2x\quad (C_1, C_2 : 任意定数)\quad \square$$

例題 2. は裏面にあります

例題 2. [　] 内の関数が対応する同次方程式の特殊解である事を確かめ，階数低下法を用いて 次の微分方程式を解け．但し，$y = y(x)$.

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 4x^3 \qquad [\ x^3\ ]$$

(解答例) $y_0 = x^3$ とおく．$y_0' = (x^3)' = 3x^2$, $y_0'' = (3x^2)' = 6x$ より

$$x^2y_0'' - 3xy_0' + 3y_0 = x^2 \cdot 6x - 3x \cdot 3x^2 + 3x^3 = (6 - 9 + 3)x^3 = 0.$$

よって，$y_0 = x^3$ は ①に対応する同次方程式 $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$ の特殊解である．

次に階数低下法により $y = y_0 \cdot u(x) = x^3u(x) \cdots$ ② とおいて ① を解く．以後簡単に $u = u(x)$ で表す．② より

$$y' = (x^3u)' = (x^3)'u + x^3u' = 3x^2u + x^3u' \cdots ③,$$
$$y'' = (y')' = 3\{(x^2)'u + x^2u'\} + \{(x^3)'u' + x^3u''\} = 6xu + 6x^2u' + x^3u'' \cdots ④.$$

②③④を ①に代入して整理すると

$$① \Leftrightarrow\ x^2(6xu + 6x^2u' + x^3u'') - 3x(3x^2u + x^3u') + 3x^3u = 4x^3$$
$$\Leftrightarrow\ x^5u'' + 3x^4u' = 4x^3\ \Leftrightarrow\ u'' + \frac{3}{x}u' = \frac{4}{x^2} \cdots ⑤ \qquad (\leftarrow u\text{の項が消える！})$$

ここで, $u' = v \cdots$ ⑥ とおくと $u'' = v'$ より ⑤を書き直すと

$$⑤ \Leftrightarrow\ v' + \frac{3}{x}v = \frac{4}{x^2} \cdots ⑦$$

⑦は v の 1 階線形微分方程式だから 解の公式 (テキスト p.40) を用いて 解くと

$$v = e^{-\int \frac{3}{x}dx}\left(\int (\frac{4}{x^2})e^{\int \frac{3}{x}dx}\,dx + C_1\right) = e^{-3\log x}\left(\int (\frac{4}{x^2})e^{3\log x}\,dx + C_1\right)$$
$$= x^{-3}\left(\int (\frac{4}{x^2})x^3\,dx + C_1\right) = \frac{1}{x^3}\left(\int 4x\,dx + C_1\right)$$
$$= \frac{1}{x^3}(4 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1) = \frac{2}{x} + \frac{C_1}{x^3} \cdots ⑧$$

⑥⑧より $u' = \frac{2}{x} + \frac{C_1}{x^3}$

$$u = \int u'\,dx = \int (\frac{2}{x} + \frac{C_1}{x^3})dx = 2\log x + C_1(\frac{x^{-3+1}}{-3+1}) + C_2 = 2\log x - \frac{C_1}{2x^2} + C_2 \cdots ⑨$$

②⑨より

$$y = x^3u = x^3(2\log x - \frac{C_1}{2x^2} + C_2)$$

定数 $-\frac{C_1}{2}$ を改めて C_1 とおくと

$$y = x^3u = x^3(2\log x + \frac{C_1}{x^2} + C_2) \qquad (C_1, C_2 : \text{任意定数}) \quad \Box$$