静力学のはじめ（２）

●平面内の平行な力

・同方向に作用する２つの平行な力Ｐ,Ｑの和を求める。Fig.1(a)でＰ,Ｑの作用点 A,B に、AB 線に沿って同じ大きさで逆方向の力Ｓを加えても、系全体のつり合い状態は破られない。そこで、Ｐ,ＱとＳで合成力$Ｐ_1$,$Ｑ_1$を各々作成すると、これらは平行ではないから作用線の延長は点 D で交わる。この力$Ｐ_1$,$Ｑ_1$を作用線上で交点 D まで移動してからＰ,ＱとＳに分解すると、２つのＳはつり合っているから系から除去することができ、点 D に（Ｐ,Ｑと同方向の線 DC 上に）Ｐ,Ｑの作用が残る。これは点 A,B でのＰ,Ｑの作用と等価であるから、合力Ｒ＝Ｐ＋Ｑが点 D に作用していると見なしてよい。合力Ｒの作用位置は、幾何学的な２つの関係（AC/CD＝Ｓ/Ｐ，BC/CD＝Ｓ/Ｑ）より、AC/BC＝Ｑ/Ｐ、つまり線分 AB を力Ｐ,Ｑの比率で分割する点 C で定まる。

・逆に(ｂ)図で、１つの力Ｒを同方向の２つの平行力Ｐ,Ｑに分解するには、Ｒの作用線に垂直な線を引き、求めたいＰ,Ｑの作用線との交点を A,B として、各点でモーメントを等値する。

点 B：　Ｐ×AB＝Ｒ×CB　→　Ｐ＝Ｒ×(CB/AB)
点 A：　Ｑ×BA＝Ｒ×CA　→　Ｑ＝Ｒ×(CA/BA)

・逆方向に作用する２つの平行力の和も上と同様な考えで求まる。すなわち、(c)図で、２つのつり合い力Ｓを導入して力$Ｐ_1$,$Ｑ_1$を作成し、延長線の交点 C まで移動して分解すれば、点 C に作用する合成力Ｒ＝Ｐ－Ｑが定まる。Ｐ＞ＱならＲはＰと同方向である。点 C の位置は、Ｐ,Ｑの作用点 A,B を通る延長線に下した垂線の交点を A',B'として、CB'/CA'＝Ｐ/Ｑ　の関係より定まる。

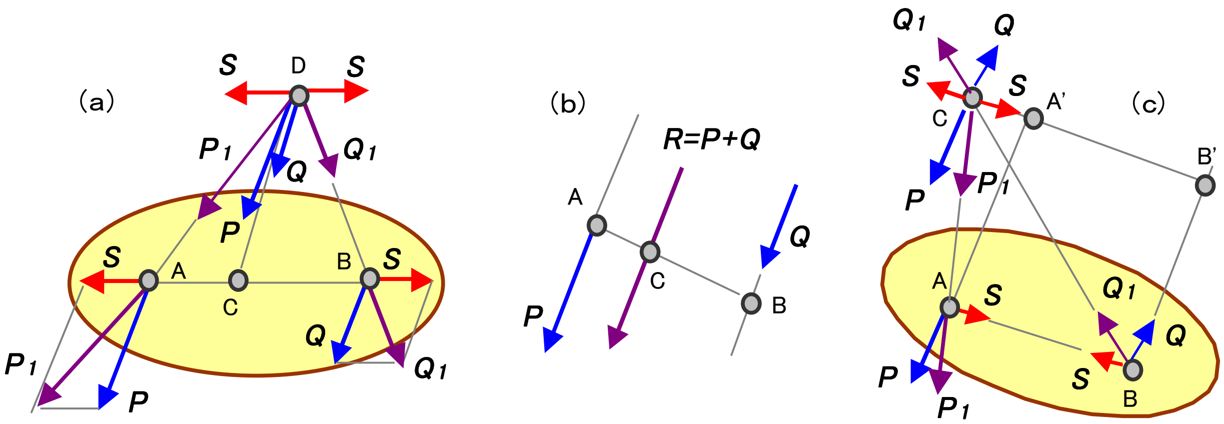


***Fig.1*　同方向に働く平行な力**

●偶力（逆方向に作用する２つの同じ大きさの力）

・Fig.1(ｃ)でＰ＝Ｑの場合は１つの合力に合成することはできない。何故なら、平行四辺形 APP_1S と BQQ_1S が同形で､対角の$Ｐ_1$と$Ｑ_1$が大きさ等しく逆方向の力になるので交点Ｃが定まらない。このような逆方向に作用する同じ大きさの力を偶力、その間の距離ａをアーム長と称する。Fig.2(a)で任意点Ｏに関して２つの力Ｐのモーメントを計算すると、点Ｏの位置によらず

$$M＝Ｐ×OD－Ｐ×OC＝Ｐ×(OD－OC)＝Ｐ×ａ$$

これを偶力モーメントと呼ぶ。ある系に偶力を作用させるとき、そのアームをどのように傾けても結果は変わらない。つまり偶力の作用は、そのモーメント(Ｐ×ａ)の大きさだけで決まる。

・同一平面内に働く２つの偶力は、符号（右・左回り）を考慮した偶力モーメントの大きさが等しければ等価な作用を与える。例えば Fig.2(b)で、偶力(Ｐ×ａ)と偶力(Q×ｂ)の作用を合成する場合、まず偶力(Ｐ×ａ)をアーム長がｂの偶力(Ｐ'×ｂ)に置換すると

$$P'×ｂ＝P×ａ　→　P'＝P(ａ/ｂ)$$

アーム長を統一した上で点A,CのQとP'の加減算を行えばよく、左回りを正とした時、合成後の作用は大きさ(Q－Pa/b)、アーム長bの偶力に帰着する。そして、合成の偶力モーメントは

$$(Q-Pa/b)\times b=(Q\times b)-(P\times a)$$

すなわち、元の２つの偶力モーメントの差に等しい。QとPが同方向に回転するなら和になる。

・以上まとめると、同一平面内に作用する２つの偶力は、そのモーメントの大きさが等しく符号が逆であれば互いにつり合う。広く言うと、同一平面内に作用する幾つかの偶力は、そのモーメントの代数和がゼロであればつり合い状態にある。

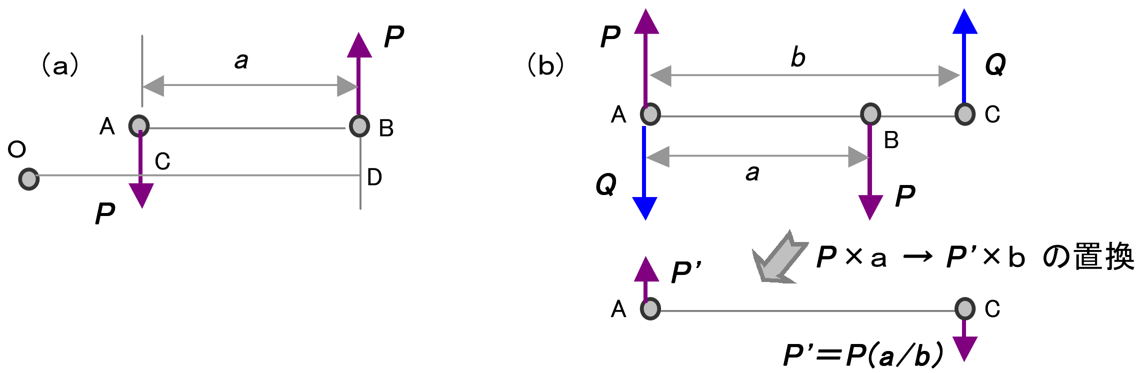


***Fig.2*　偶力**

・Fig.3(a)の点Aに作用する力Pは、(c)図のように、他の点Bに作用する力Pと偶力モーメントM＝P×aの作用に置換できる。何故なら、(b)図で、点Bに（点AのPと平行方向に）逆方向に作用する大きさPの２つの力を加えても、重ね合わせの法則より系のつり合い状態は破れない。つまり、(a)図と(b)図の力系はつり合い状態からすると同等である。したがって、(b)図で力の作用を考えると、点Aに働くPと点Bで逆方向に働くPは、M＝P×aのモーメントを有する偶力の作用と見なせ、残りのPとともに点Aに働くPと等価な作用を与える。この置換は点Bの位置（または距離a）に関わらず成り立ち、種々の問題で利用される。

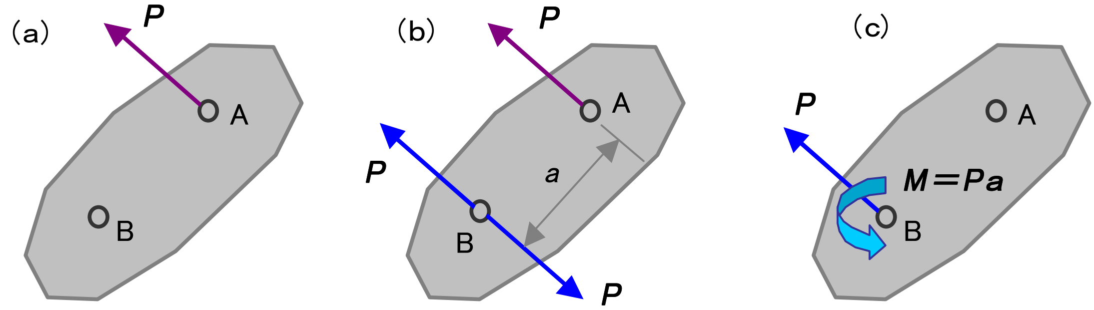


***Fig.3*　１つの力を力と偶力に分解**

●一般の平行力

・Fig.4(a)で、平行な力が向きを変えて多数作用する場合は、合成力を求める前記の方法を適用し、１つの方向に対して合力$R_1(=F_1+F_2+F_3)$、他の方向に対して合力$R_2(=F_4+F_5)$を順次求め、この２つの力で作用形態を調べればよい。この場合、３つのパターンが考えられる。

①$R_1\neq R_2$ の場合：作用方向が逆の２つの平行力であるから、前の方法でR_1,R_2の合力Rを作ると、それが系に作用する全ての力(F_1～F_5)の合力になる。($R=F_1+\cdot\cdot+F_5$)

②２つの平行線上で$R_1=R_2$ の場合：偶力を形成する。

③１つの線上で$R_1=R_2$ の場合：力がつり合っている。($F_1+\cdot\cdot+F_5=0$)

これらは以下のように式表現できる。

①(F_1～F_5)の和がゼロでない時（$\Sigma F_i \neq 0$）合力Rが存在する。作用位置は任意点を O として
R×(点 O からの足の長さ)
＝(点 O に関する力のモーメント和 ΣM_i)
の関係から定まる。以上を式表示すると

$$R = \Sigma F_i \qquad x_o = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} \qquad (1)$$

x_oは点 O に関する合力Rの作用位置である。

②(F_1～F_5)の和がゼロで、R_1, R_2が形成する偶力モーメントが存在するから（$\Sigma M_i \neq 0$）

$$\Sigma F_i = 0 \qquad \Sigma F_i x_i \neq 0$$

③全力がつり合っているから

$$\Sigma F_i = 0 \qquad \Sigma F_i x_i = 0$$

・(b)図のように系に３つの力F_1, F_2, F_3が働くとき、F_1とF_2の合力R_1はA_1A_2線上の点C_1に作用する。その距離は前と同様 A_1C_1：A_2C_1＝F_2：F_1で決まる。次にR_1とF_3の合力を考えRとすると、その作用点 C は C_1C：A_3C＝F_3：R_1で決まる。このようにして平行な力が多数作用するときの合力の着力点位置が求まる。これらを式表示すると式(1)と同じになる。例えば(c)図で y 方向に働く 3 つの力F_{1y}～F_{3y}の合力Rと作用位置x_cは、各力の原点からの距離をx_iとして

$$R_y = \Sigma F_{iy} \qquad x_c = \frac{\Sigma F_{iy} x_i}{\Sigma F_{iy}}$$

同様に、x 方向に働く 4 つの力F_{1x}～F_{3x}の合力Rと作用位置y_cは

$$R_x = \Sigma F_{ix} \qquad y_c = \frac{\Sigma F_{ix} y_i}{\Sigma F_{ix}}$$

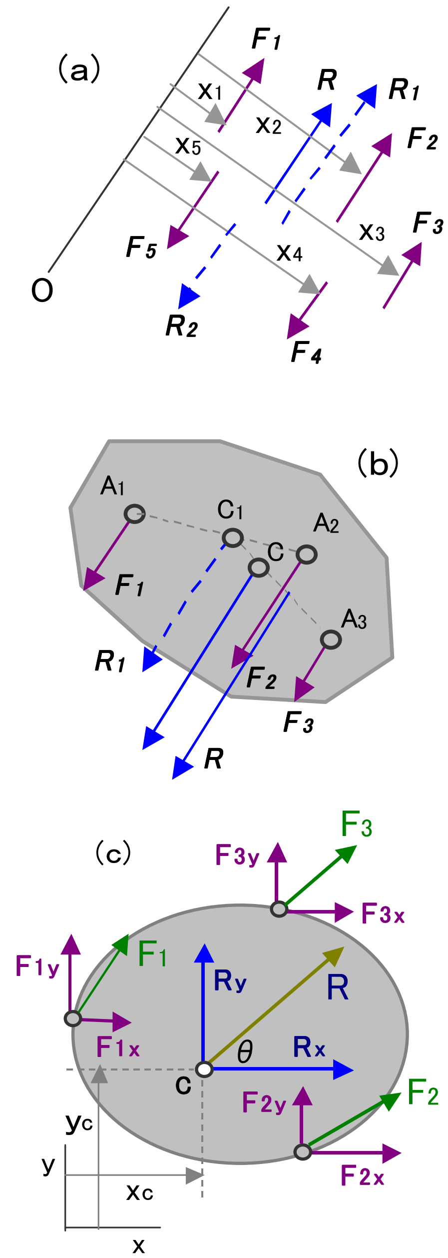


***Fig.4*　平行な複数の力**

●重心・図心

・物体の重心とは、物体内に分布している重力の合力が通る点を言う。物体を細かく分割したとき各要素の重力(重さ)は平行な力系（鉛直軸に平行な力）を形成するから、その合力の作用点が重心になる。Fig.5 の平面物体の場合（厚さや材質が一定なら）分割された平面要素の重さは面積⊿A_iに比例する。線状の物体の場合は線素⊿L_iに分割するが、その重さは長さに比例する。

・重力という意味合いが必要でなければ、形の幾何学的な中心として図心という表現が使われる。このとき、Fig.5 の平面物体や線状物体の図心位置を求める問題は、細分した面・線要素に作用する重力(平行な力)の中心、すなわち重力に比例する面積⊿A_iや長さ⊿L_iの中心を求める問題に帰着する。したがって、図心位置（x_c, y_c）は式(1)と同様な形で表示され

平面物体に対して $$x_c = \frac{\Sigma \Delta A_i x_i}{\Sigma \Delta A_i} \qquad y_c = \frac{\Sigma \Delta A_i y_i}{\Sigma \Delta A_i} \qquad (2a)$$

線状物体に対して　$x_c = \dfrac{\Sigma \Delta L_i x_i}{\Sigma \Delta L_i}$　　$y_c = \dfrac{\Sigma \Delta L_i y_i}{\Sigma \Delta L_i}$　　(2b)

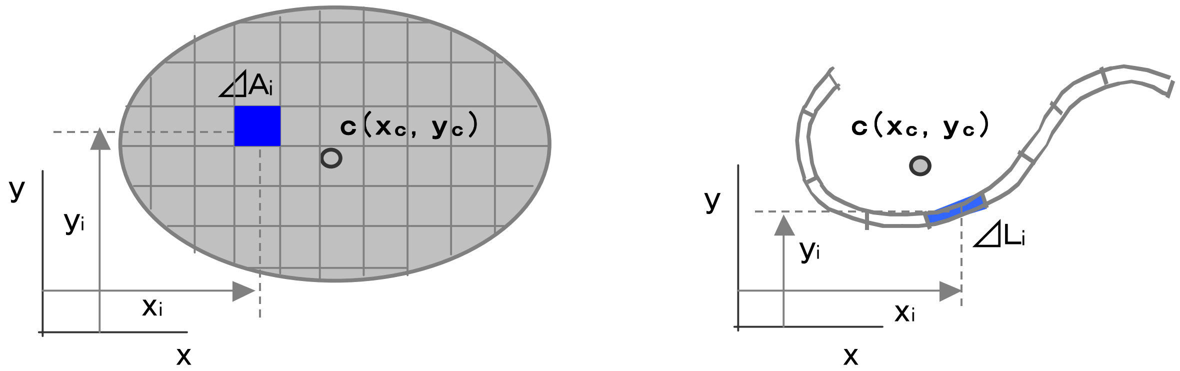


***Fig.5*　物体の図心**

・実際に図のように要素分割して式(2)を用いて図心を計算すると、境界付近で⊿A_iや⊿L_iが正確に定まらないため、誤差が多く含まれることになる。つまり式(2)は近似式であって、正確な表現としては⊿A_iや⊿L_iを限りなく小さく（要素分割を無限に）とった以下の積分表示が正しい。

平面物体に対して　$x_c = \dfrac{\int x dA}{\int dA}$　　$y_c = \dfrac{\int y dA}{\int dA}$　　(3a)

線状物体に対して　$x_c = \dfrac{\int x dL}{\int dL}$　　$y_c = \dfrac{\int y dL}{\int dL}$　　(3b)

・積分で図心を計算するためには平面や曲線の形が関数形で表示されている必要がある。そうでない場合は要素をなるべく細かく区切って式(2)の形で求めるしかない。単純な図形の図心位置はFig.6(ａ)(ｂ)のように目で見て判断できる。(ｃ)図の三角形の図心は各辺の中点を結ぶ線の交点で与えられる。例えば辺 AD に平行な細片に分割したとき、各細片の図心は中点にあるから、全体図形の図心も Bb 線上のどこかにあるはずである。同じことを BD,AB 線に平行な細片で考えても同じだから、共通の図心として交点 C が全体図形の図心になる。点 C は各辺から h/3 高さ（または頂点から 2h/3）にある。なお、この図心は三角形断面の面積の図心であって、三角形の周囲線に関する図心ではない。

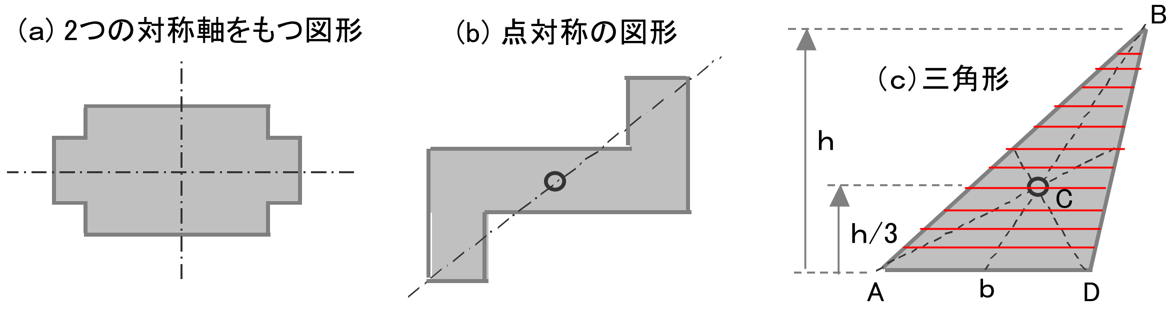


***Fig.6*　単純図形の図心**

●複雑な図形の図心

・複雑な図形の図心を求めるには、その図形を図心が既知な単純図形に分割し、分割した図形のモーメント和が全体図形のモーメントに一致することを利用する。例えば Fig.7(ａ)のカギ型図形の図心を求めるには、図心が明瞭な２つの長方形 Obcd(面積 A_1)と defg(面積 A_2)に分ける。各長方形の図心位置を(x_1, y_1) (x_2, y_2)と置くと、全体図形の図心位置(x_c, y_c)は式(2)より

$(A_1 + A_2) \times x_c = A_1 x_1 + A_2 x_2$　　$(A_1 + A_2) \times y_c = A_1 y_1 + A_2 y_2$

$$\rightarrow \quad x_c = \frac{A_1x_1 + A_2x_2}{A_1 + A_2} \qquad y_c = \frac{A_1y_1 + A_2y_2}{A_1 + A_2} \qquad (4)$$

・別法を(b)図に示す。 与えられた図形は長方形 Oabc(面積 A_1'で図心 $c_1(x_1', y_1')$)から長方形 efbd(面積 A_2'で図心 $c_2(x_2', y_2')$)を差し引いたものと見なせるから、A_1'に関するMから A_2'に関するMを差し引いたものが全体図形のMになる。全体図形の面積は $A_1' - A_2'$であるから

$$(A_1' - A_2') \times x_c = A_1' x_1 - A_2' x_2 \quad \rightarrow \quad x_c$$
$$(A_1' - A_2') \times y_c = A_1' y_1 - A_2' y_2 \quad \rightarrow \quad y_c$$

より全体図形の図心(x_c, y_c)が定まる。(c)図の曲線や折れ線の場合は、これを直線の集まりと見なし、長さと図心位置を各々 $L_1, c_1(x_1', y_1')$, $L_2, c_2(x_2', y_2')$, $L_3, c_3(x_3', y_3')$とすれば

$$x_c = (L_1 x_1 + L_2 x_{12} + L_3 x_3)/(L_1 + L_2 + L_3) \qquad y_c \text{も同様}$$

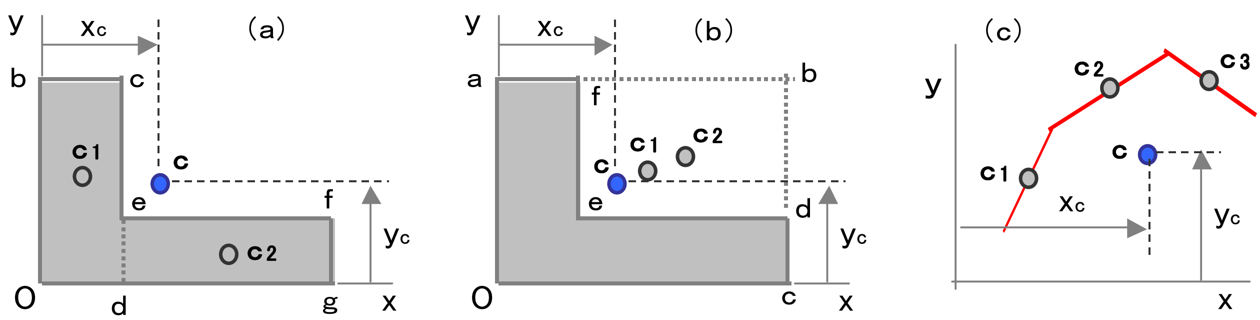


Fig.7　複雑な図形の図心

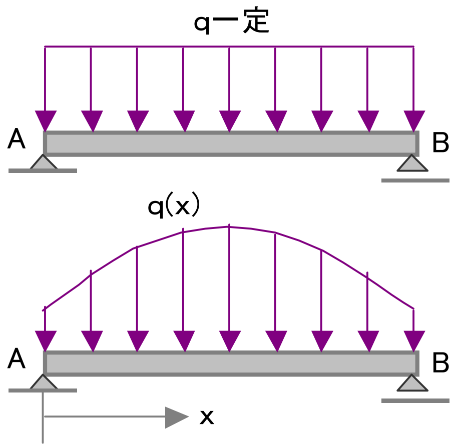
●平面内の分布した力

・梁の上に一様層厚の砂が盛られたとき、その重さが梁に与える影響は分布した一様荷重 q で扱われる。q を荷重強さ(荷重強度)と呼ぶ。砂の厚さが一様でなく梁の位置 x によって変わるときは、荷重強さが x の関数となり、分布荷重 $q(x)$として表現される。

・Fig.8 右のように任意の分布荷重 $q(x)$が作用する梁を考える。x 位置で梁を微小区間 dx に分割すると、その区間の荷重作用は、これと等価な集中力 $dQ = q(x) \times dx$ に置換できる。dQの大きさは荷重分布図に影で囲った高さ $q(x)$、幅 dx の長方形の面積と考えてもよい。このような微小区間に作用する集中力 dQを AB 間で加算したものが全合力Qになり、式表示では

$$Q = \Sigma dQ = \int dQ = \int q(x)dx \qquad (5)$$

と表現できる。つまり、分布荷重 $q(x)$の合力Qは分布荷重図の面積に相当するといえる。



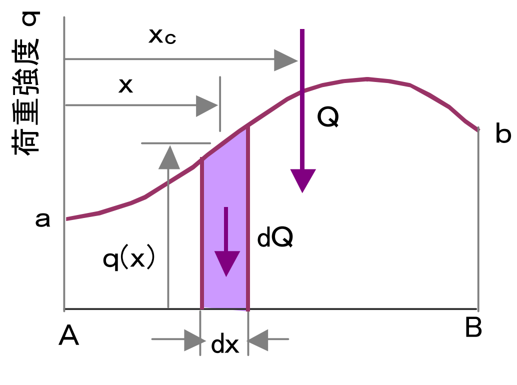


***Fig.8*　分布荷重の合力と作用位置**

・次に合力Qの作用位置 x_c を求める。 図より点Aに関する微小集中力dQのモーメントは dM＝dQ×x＝q(x)dx×x であるから、その合計Mは AB 線に沿って dMを加算した

$$M=\Sigma dM=\Sigma(dQ\times x)=\Sigma q(x)xdx=\int q(x)xdx$$

となり、この値が合力Qの点Aに関する $M=Q\times x_c$ に一致する条件から

$$x_c=\frac{\int q(x)xdx}{Q}=\frac{\int q(x)xdx}{\int q(x)dx} \qquad (6)$$

これを式(2)や式(3)と比較して分かるように、合力Qの作用位置は荷重分布図の図心位置に相当すると言える。

・分布荷重が不連続な場合は、各分布の合力やMを加算して全合力や作用位置を求める。 すなわち、全合力は各分布の合力を単純に加算して、作用位置は各分布のMの合計が全合力のMに一致する条件から求める。荷重強さに正負がある場合は、それぞれに合力やMを求めて加減算する。このように分布する外荷重は、それと等価な集中力に置き換えて問題を解くことができるが、常に置き換えて良いと言うことではなく、問題の性質（何が問われているか、とか要求される計算精度）による。特に、分布荷重による特性・効果を調べたい場合は置き換えは許されない。

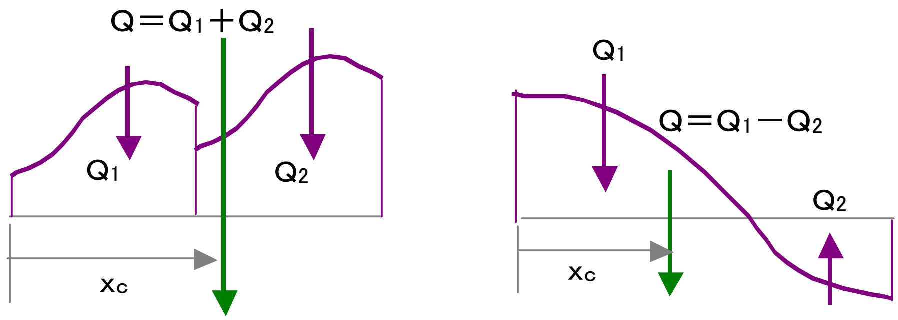


***Fig.9*　分連続な分布荷重の合力と作用位置**