静力学演習（1）

以下は「静力学のはじめ（１）」に関する演習問題である。読んで理解したつもりでも、実際に問題に向かうと何故か解けないことがよくある。完全な理解は問題を解いて初めて証明されるので、是非トライして欲しい。

解答は末尾に付いているが、まずは解答を見ないで別のノートにやってみること。分からないからといって、すぐに解答を見ない。少なくとも３回は問題を読み、どの法則？どの考え方？に関連し、何を問うているのか、という問題の趣旨を読みとるように努めること。どうしても分からなければ解答を見てよいが、同様の問題が複数あるので、再挑戦してみること。一巡した後に再度、白紙状態で挑戦してみるのもよい。ともかく、勉学はシツコクやらないと向上しないことだけは何時の世でも真である。

問１）２つの力Ｐ,Ｑが角αをなして物体に作用するとき、それらの合力Ｒの大きさと作用方向を求めよ。（平行四辺形の法則／図１）

問２）鉛直に働く引張力 P=6kN に力 Q を加えて水平合力 R=8kN にするための Q の値と作用方向 αを求めよ。（力の合成／図２）

問３）W=10kN の重りがα＝30°の斜面上にあるとき、斜面に垂直な成分 N と平行な成分Ｔに分解せよ。（力の分解／図３）

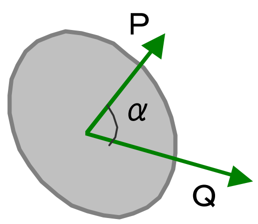


図１

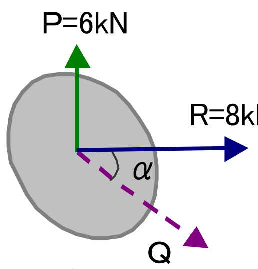


図２

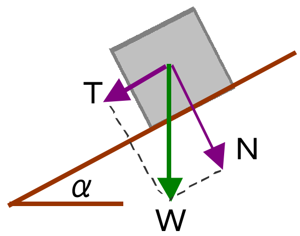


図３

問４）２本の糸で重り W=40kN を吊るすとき、各糸の張力 S_1,S_2 を求めよ。（力のつり合い／図４）

問５）W＝10kN の重りを糸で吊るし、完全に滑らかな壁に接触させる。α＝30°として、重りが壁から受ける反力 R と糸の張力Ｔを求めよ。（力のつり合い／図５）

問６）半径ｒ＝60cm の２つの球がＬ＝160cm の糸で結ばれている。この上に同じ半径で重さW＝2kN の球を載せたとき、糸の張力Ｓを求めよ。（力のつり合い／図６）

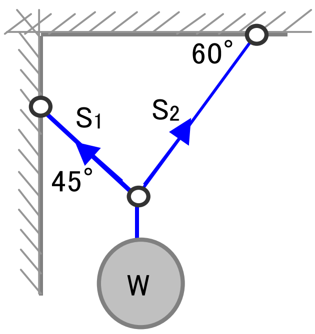


図４

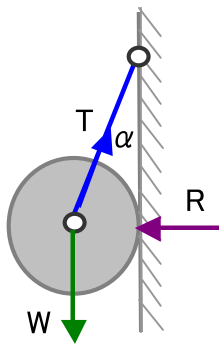


図５

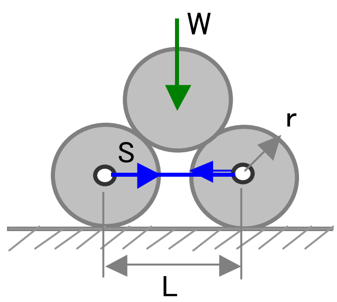


図６

問７）重さW＝10kN の球が２つ、滑らかな壁と傾斜した床に接触しているとき、３点 A,B,C における接触反力の値を求めよ。（力のつり合い／図７）

問８）Q＝１kN，P＝２kN の重りを２つの滑車を介して対称的に吊すとき、中央部の下がり量 δ を求めよ。（力のつり合い／図８）

問９）45°傾斜する滑らかな壁に球体W＝10kN を接触させ、15°方向に糸で吊すとき、糸の張力Ｓと壁反力Ｒを求めよ。（力の成分・つり合い／図９）

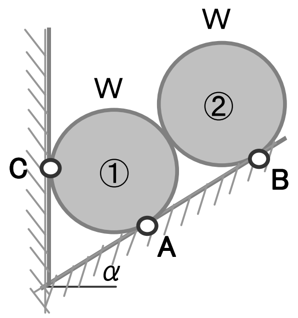


図７

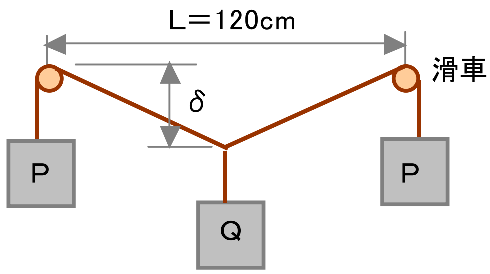


図８

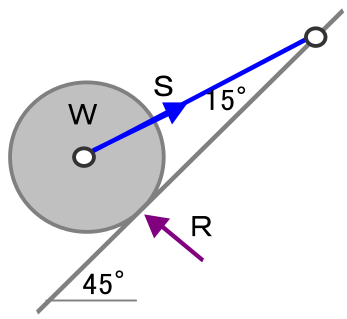


図９

問 10）図のトラス構造において水平力Ｐによる各部材力を求めよ。（力の成分・つり合い／図 10）

問 11）重さW＝20kN の棒を壁にヒンジ結合して先端を糸で吊すとき、点Ａにおける反力 R_A と糸の張力Ｓを求めよ。（力のつり合い／図 11）

問 12）重さW＝20kN の棒を滑らかな壁に立てかけ点Ａで支えるとき、２点 A,B の反力 R_A（H_A, V_A）及び R_B を求めよ。（力のつり合い／図 12）

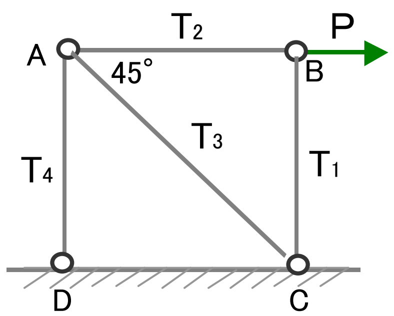


図 10

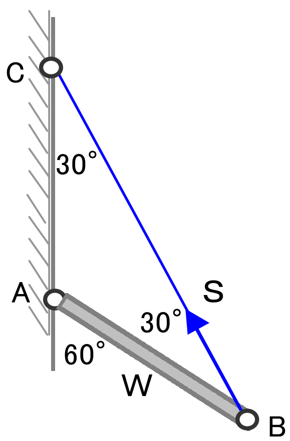


図 11

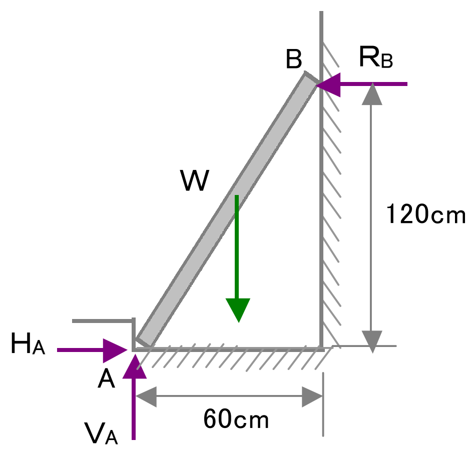


図 12

問 13）壁にヒンジ結合され、中央を糸で吊された棒の先端に荷重Ｐを載荷するとき、糸の張力Ｓと壁反力 R_A（H_A，V_A）を求めよ。棒の自重は無視する。（力のつり合い／図 13）

問 14）重さWの棒の一端を滑らかな壁に接触させ、他端を糸でつり下げる。棒がつり合い状態にあるための接触位置ｘを糸の長さａと棒の長さｂで表せ。また、ａ＝50cm, b＝40cm のとき、糸の張力Ｓと壁反力 R_A をWの倍数で表せ。（力のつり合い・力の多角形／図 14）

問 15）壁に一端をヒンジ結合した棒の中央を糸で留め、先端に荷重 P を載荷するとき、糸の張力 S と点 A の反力 R_A（H_A，V_A）を P の倍数で示せ。（力のつり合い／図 15）

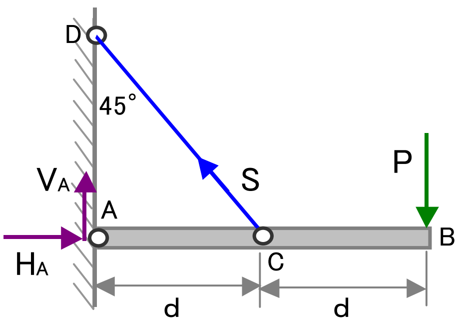


図 13

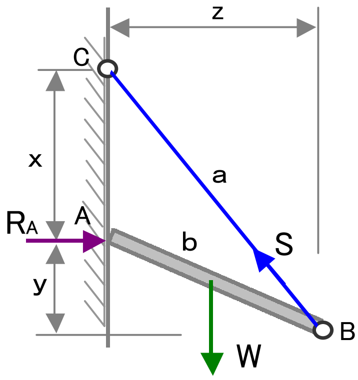


図 14

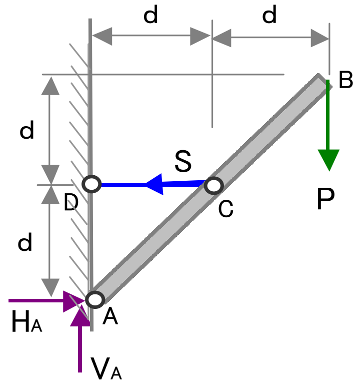


図 15

問 16）重さ W、半径 2ａの球の頂部に水平力Ｐを加え、高さａの段差を乗り越えさせるに必要なＰと反力Ｒの値をＷの倍数で表せ。（力のつり合い／図 16）

問 17）壁にヒンジ結合された長さＬの棒（自重無視）の先端を天井から糸で吊し、中途に重りＱを載荷する。糸の張力Ｓが最大となるＱの位置ｘと、Ｓの最大値を求めよ。
（モーメント・力のつり合い／図 17）

問 18）滑らかな表面を持つ円筒（半径ｒ）が水平床上にあり、長さ 2ｒの糸 AC で回転を抑えられている。長さ 3ｒ、重さＷの棒 AB が点Ａでヒンジ結合され円筒に寄りかかっているとして、糸の張力Ｓと円筒と棒の接触力Ｐを求めよ。（モーメント・力のつり合い／図 18）

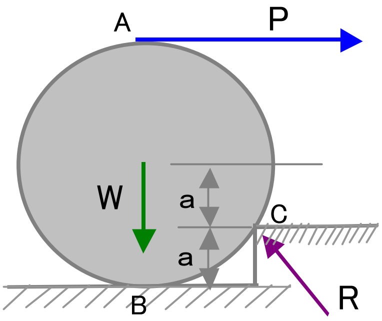


図 16

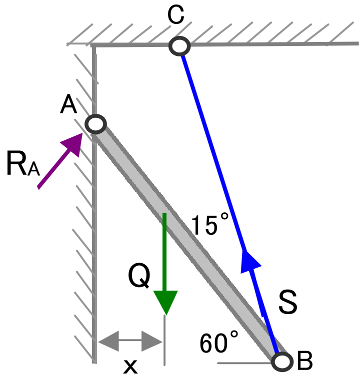


図 17

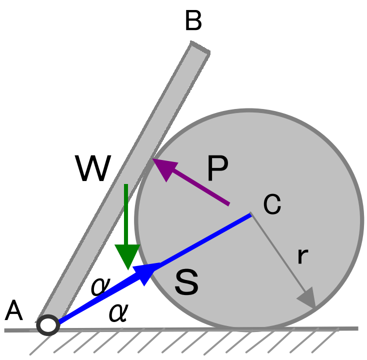


図 18

問 19）幅 2ｂ、高さｈ、重さＷのブロックが水平な床に置かれ、横力Ｐを受ける。ブロックと床の摩擦角をφとして、ブロックの転倒と滑動が同時に生じるときの横力Ｐの大きさと作用位置ｃを求めよ。（摩擦／図 19）

問 20）重さＷの石を水平角αの方向に引張って滑らす（摩擦角φ）とき、引張り力が最小となる角度αとその最小値 P_{min} を求めよ。（摩擦／図 20）

問 21）重りＱが角α傾斜する床上で重りＰと滑車を介して連結されている。床の摩擦角をφとして、滑り出す限界の力比Ｐ/Ｑを求めよ。 α＞φ とする。（摩擦／図 21）

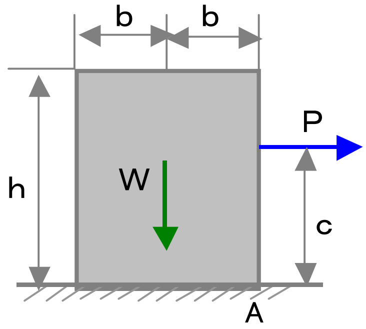


図 19

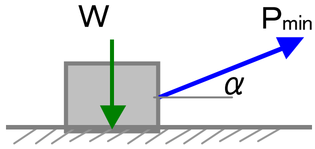


図 20

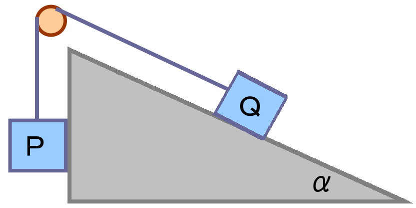


図 21

問 22）重さW_1 及びW_2 の２つのブロックを糸でつなぎ、上のブロックを図のように引張るとき、滑りを発生させる引張力Ｐの最小値とその方向αを求めよ。（摩擦／図 22）

問 23）２つのブロックが糸に結ばれて角度αの斜面上にある。各ブロックの摩擦係数が異なるとき、$W_1=W_2=W$として、ブロックが滑り始める角度αを求めよ。（摩擦／図 23）

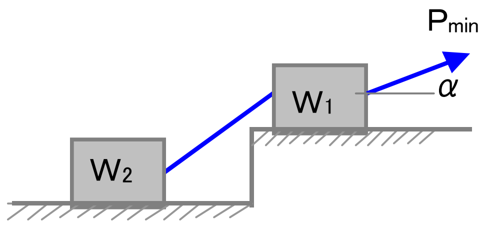


図 22

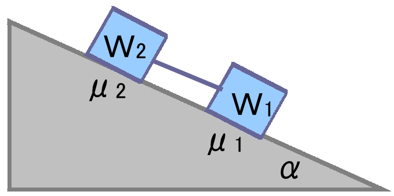


図 23

問 24）重さWが等しい２つのブロックを滑車を介して接続し、１つを角度αの斜面に置くとき、ブロックが滑り出すときの角度αを求めよ。摩擦係数をμとする。（摩擦／図 24）

問 25）同型の２つのブロックを棒で連結し、一方を水平床に、他方を鉛直壁に接触させたとき、傾斜角θ＝45°で滑り出したとすると、床と壁の摩擦係数はいくらか。（摩擦／図 25）

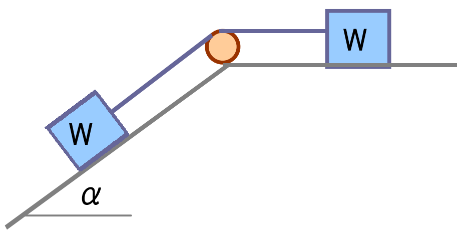


図 24

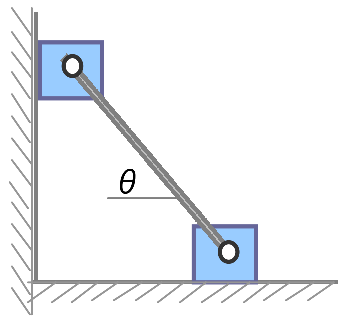


図 25

解答（疑問があれば問い合わせされたし）

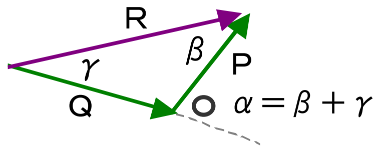
問１）平行四辺形の法則またはベクトルの幾何学和の作図をすれば合力Ｒが矢印で定まるが、その大きさと方向を数値的に表したいときは、通常の幾何の法則を用いる。
大きさＲは上の三角形で、第２余弦法則を適用して

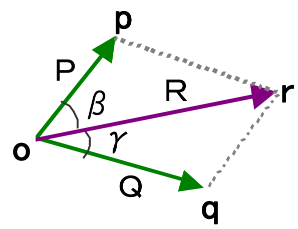
$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos(\pi - \alpha)$$
$$\rightarrow \quad R = \{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha\}^{1/2}$$

作用方向（β, γ）は下の２つの三角形で正弦法則を適用して

$$\Delta opr：Q/\sin\beta = R/\sin(\pi - \alpha)$$
$$\rightarrow \quad \sin\beta = (Q/R)\sin\alpha$$
$$\Delta oqr：P/\sin\gamma = R/\sin(\pi - \alpha)$$
$$\rightarrow \quad \sin\gamma = (P/R)\sin\alpha$$

ベクトルの幾何学和

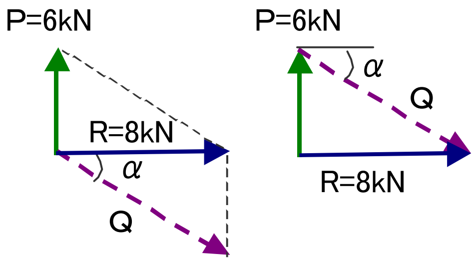




問２）図のように平行四辺形の法則か、ベクトルの幾何学和で Q が求まる。数値的には右図で

$$Q\cos\alpha = 8、Q\sin\alpha = 6 \quad \rightarrow \quad \tan\alpha = 0.75$$
$$\alpha = 36.9°$$

$$Q^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \quad \rightarrow \quad Q = 10\text{kN}$$



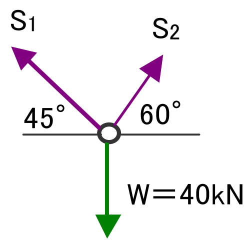
問３）互いに直交する方向にWを分解するから

$$N = W\cos\alpha = 8.66\text{kN},\quad T = W\sin\alpha = 5.0\text{kN}$$

問４）右図で水平・鉛直方向のつり合いを考える。

$$\Sigma H=0：\quad S_1\cdot\cos45° + S_2\cdot\cos60° = 0$$
$$\Sigma V=0：\quad S_1\cdot\sin45° + S_2\cdot\sin60° = 40$$

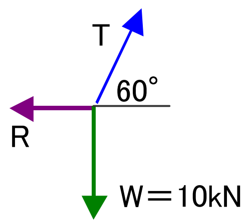
$$\rightarrow \quad S_1 = 20.7\text{kN},\quad S_2 = 29.3\text{kN}$$



問５）“完全に滑らかな壁”では摩擦力が働かず、接触反力Ｒは壁に垂直に作用する。右図で水平・鉛直方向のつり合いを考え

$$\Sigma H=0：\quad R - T\sin\alpha = 0$$
$$\Sigma V=0：\quad T\cos\alpha - W = 0$$

$$\rightarrow \quad T = 11.5\text{kN},\quad R = 5.77\text{kN}$$

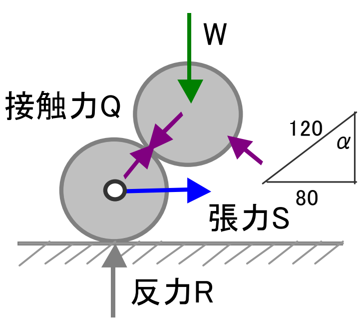


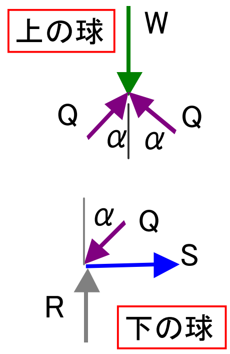
問６）上下の球の接触力をＱとすると、上の球では２つのＱとWがつり合い、

$$2Q\cos\alpha = W$$
$$\rightarrow \quad Q = 3W/2\sqrt{5} = 1.34\text{kN}$$

下の球の水平・鉛直方向つり合いより

$$S = Q\sin\alpha = W/\sqrt{5} = 0.894\text{kN}$$
$$R = Q\cos\alpha = W/2 = 1.0\text{kN}$$





問７）滑らかな接触であるから反力は全て壁・床面に垂直に作用する。球同士の接触力をＱとして各球に働く力のつり合いを調べると

球②

$\Sigma H=0$：　$Q\cos30^\circ - R_B \cdot \sin30^\circ = 0$

$\Sigma V=0$：　$Q\sin30^\circ + R_B \cdot \cos30^\circ = W$

$R_B=\sqrt{3}Q$,　$Q=W/2$　$\rightarrow$　$R_B=8.66\mathrm{kN}$

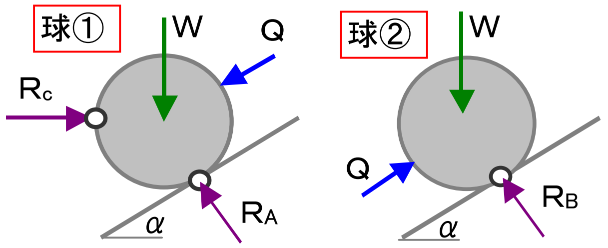
球①

$\Sigma H=0$：　$Q\cos30^\circ + R_A \cdot \sin30^\circ = R_C$

$\Sigma V=0$：　$-Q\sin30^\circ + R_A \cdot \cos30^\circ = W$

$\rightarrow$　$R_A=5W/2\sqrt{3}=14.4\mathrm{kN}$

$R_C=2W/\sqrt{3}=11.5\mathrm{kN}$

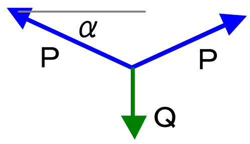


問８）中央の連結位置での力関係は図のようになるから、

$2P\sin\alpha = Q$　$\rightarrow$　$\sin\alpha = Q/2P = 0.25$

$\cos\alpha = 0.968$,　$\tan\alpha = 0.258$

$\rightarrow$　$\delta = (L/2)\tan\alpha = 15.5\mathrm{cm}$



問９）球に作用する力は図のようになるから、つり合い関係を調べてＳとＲを求める。

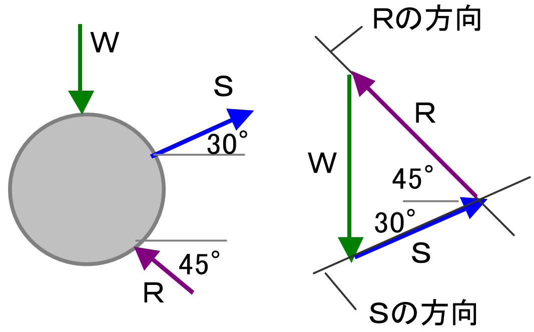
$\Sigma H=0$：　$S\cos30^\circ - R\cos30^\circ = 0$

$\Sigma V=0$：　$S\sin30^\circ + R\sin45^\circ = W$

$\rightarrow$　$S=7.32\mathrm{kN}$,　$R=8.97\mathrm{kN}$

この問題では、Ｗの大きさと方向及びＳとＲの方向が既知であるから、力の多角形が閉じることを考えて右図のように三角形を描いて求めてもよい。

（Ｗの矢印を描き、その両先端からＳ及びＲ方向に直線を引いて三角形を描く）



問 10）部材接合点における力のつり合いを考える。

点Ｂで　$\Sigma H=0$　$\rightarrow$　$T_2=P$

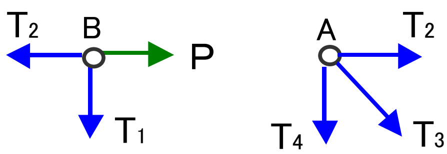
$\Sigma V=0$　$\rightarrow$　$T_1=0$

点Ａで　$\Sigma H=0$　$\rightarrow$　$T_3 \cdot \cos45^\circ + T_2 = 0$

$T_3=-\sqrt{2}T_2=-\sqrt{2}P$

$\Sigma V=0$　$\rightarrow$　$T_3 \cdot \sin45^\circ + T_4 = 0$

$T_4=-T_3/\sqrt{2}=P$



問 11）棒は点Ａでピン結合されているので反力 R_A は壁に傾斜して作用する。その分力を H_A・V_A と置くと、力のつり合いは

$\Sigma H=0$：　$H_A - S\sin30^\circ = 0$

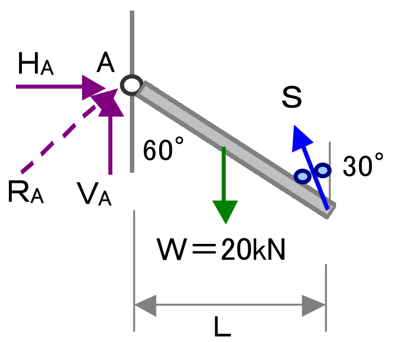
$\Sigma V=0$：　$V_A - S\cos30^\circ = W$

$\Sigma M_A=0$：　$S\cos30^\circ \times L - S\sin30^\circ \times L\tan30^\circ - W \times L/2 = 0$

以上を解いて

$H_A=8.66\mathrm{kN}$,　$V_A=5.02\mathrm{kN}$　$\rightarrow$　$R_A=10\mathrm{kN}$

$S=17.3\mathrm{kN}$



問 12）点Aの反力の分力をH_A, V_Aと置いて、力のつり合い関係を調べると（図は省略）

$\Sigma H=0$：　$H_A - R_B = 0$
$\Sigma V=0$：　$V_A - W = 0$
$\Sigma M_A=0$：　$W\times 30 - R_B\times 120 = 0$　← R_Bを求めるだけならこの式だけでＯＫ

→　$R_B=5\mathrm{kN}$, $R_A=20.6\mathrm{kN}$（$H_A=5\mathrm{kN}$, $V_A=20\mathrm{kN}$）

問 13）前問と同様に点Aの反力の分力をH_A, V_Aと置いて、力のつり合い関係を調べると

$\Sigma H=0$：　$H_A - S\cos 45^\circ = 0$
$\Sigma V=0$：　$V_A + S\sin 45^\circ = P$
$\Sigma M_A=0$：　$P\times 2d - S\sin 45^\circ\times d = 0$

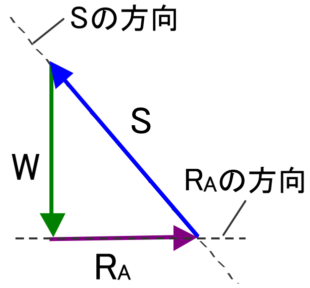
→　$S=2.83P$, $R_A=2.24P$（$H_A=2P$, $V_A=-P$）

問 14）力の作用形態は問題図に示した通りである。この問題では
モーメントのつり合い条件を考えた方が便利で

$\Sigma M_B=0$：　$R_A\times y = W\times z/2$　→　$R_A = Wz/2y$
$\Sigma M_C=0$：　$R_A\times x = W\times z/2$　→　$R_A = Wz/2x$

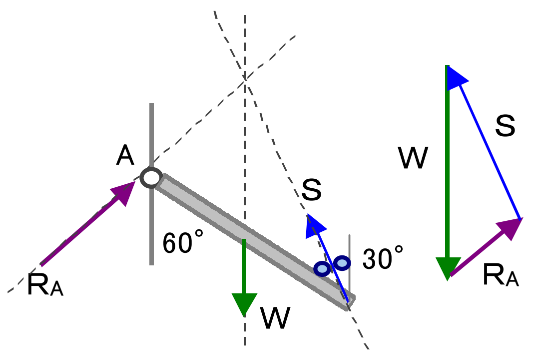
より、$y=x$ である。したがって、三平方の定理より

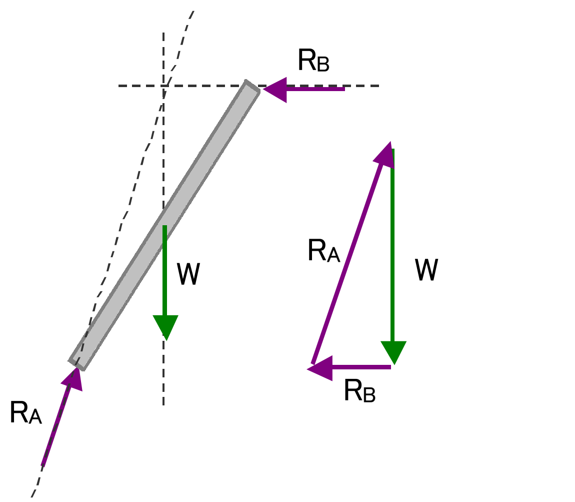
$b^2 - x^2 = a^2 - (2x)^2$　→　$x = \{(a^2 - b^2)/3\}^{1/2}$



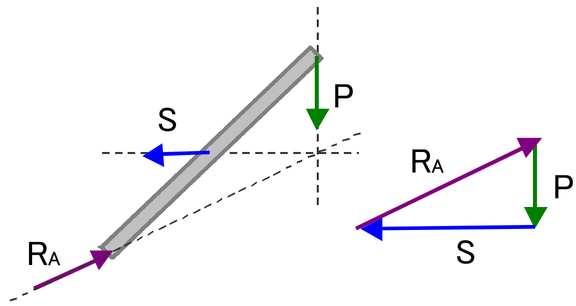
この場合は右図のようにWの矢印を描いて、その両端からS及びR_A方向に直線を引けば力の多角形が描け、両力の大きさが確定する。相似性よりW, S, R_Aの大きさは、各々長さ $2x, a, z$に比例するから、$a=50\mathrm{cm}$, $b=40\mathrm{cm}$ のとき、$x=17.3\mathrm{cm}$、$z=36.1\mathrm{cm}$ となって、$S=(a/2x)W=1.45W$, $R_A=(z/2x)W=1.04W$を得る。

※問 11)～問 14)のように、ある物体（この場合は棒）に３つの力が働くとき、それらがつり合い状態にあれば力の延長線は１点で交わるという性質がある。この性質を利用すれば、方向が既知の２つの力の延長線を引いて交点が定まり、他の１つの力の作用方向が決まる。また、この作図に基づいて力の多角形を描けば、幾何学的な関係から力の大きさを知ることができる。問 11）及び問 12）の例を示すと以下のようになる。問 13), 問 14）は各自でトライして欲しい。





問 15）棒には P，S，R_A の３つの力が作用し、これらは１点で交わるから、R_A の作用方向は作図で求まる。 力の多角形は右図のようになり、図から S/P＝2 である。したがって



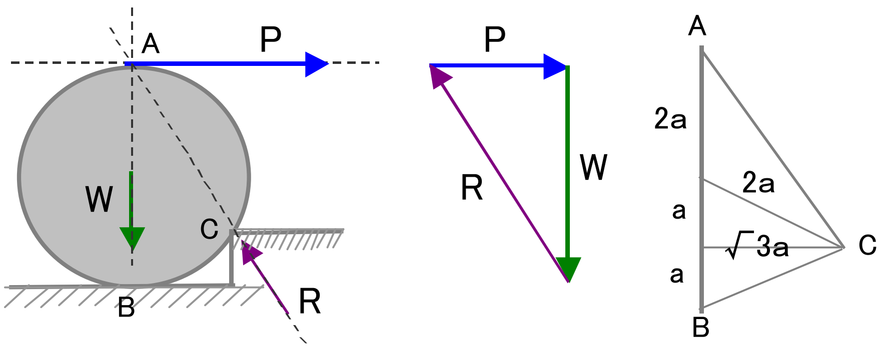
$$S=2P,\ R_A=\sqrt{5}P\ (H_A=2P,\ V_A=P)$$

張力 S を求めるだけなら、点 A 回りのモーメントつり合いを考えればよい

$$\Sigma M_A=0：P\times 2d-S\times d=0 \quad \rightarrow \quad S=2P$$

問 16）丁度乗り越えるとき、球には直下の床から反力が作用しないから、図の P,W,R のみ働く。したがって、３つの力は１点で交わり、R の方向が確定する。力の多角形は右図のようになり、幾何学的関係から

$$P/W=1/\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad P=W/\sqrt{3}=0.577W$$
$$R/W=\sqrt{12/3} \quad \rightarrow \quad R=1.15W$$



問 17）点A回りのモーメントつり合いを考えて

$$\Sigma M_A=0：Q\times x-S\cos 15^\circ\times L\cos 60^\circ+S\sin 15^\circ\times L\sin 60^\circ=0$$
$$\rightarrow \quad S=3.86Qx/L$$

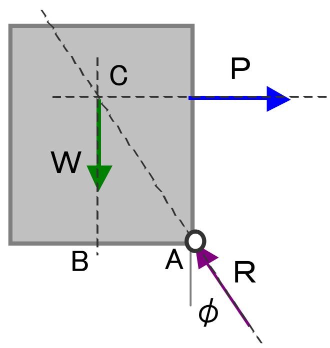
$x=L\cos 60^\circ$ すなわちQを点Bに載荷したときSが最大になり、$S_{max}=1.93Q$

問 18）AC の水平角を α として、点A回りのモーメントつり合いを考えると

$$\Sigma M_A=0：W\times 1.5r\cos 2\alpha-P\times 2r\cos\alpha=0$$
$$\rightarrow \quad P=0.433W \quad (\sin\alpha=1/2\ で\ \alpha=30^\circ である)$$

そして、円筒に働く力のつり合いより、$S=P=0.433W$ となる。

問 19）ブロックには自重Wと横力P及び床からの反力が作用する。反力の大きさや分布は横力Pの作用状況により異なるが、転倒直前では点 A に集中すると考えてよいから、集中力Rに置き換えられる。また、滑りが同時に生じるのであれば、Rの方向は床面の垂線から φ だけ傾く。このように、ブロックには３つの力が働くから、その延長線は１点 C で交わり、幾何学的な関係から

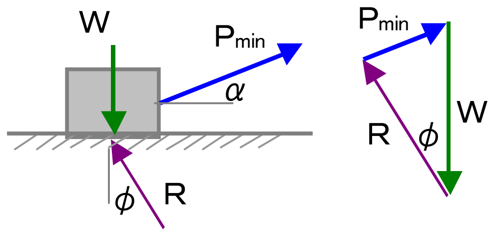


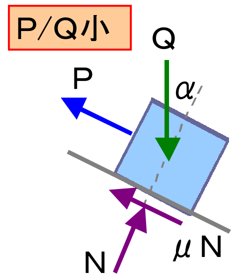
$$b/c=\mu=\tan\phi \quad \rightarrow \quad c=b/\tan\phi$$

力の多角形は ΔABC と相似になり　$P=W\tan\phi$　を得る。

問 20）石に働く力の作用状況は右図の通りで、３つの力は閉じた三角形を形成する。Wの大きさと方向及び反力Rの方向は既知であるから、Pが最小値になる条件は、PがRに対し垂直に交わること。したがって、次を得る。

$$\alpha=\phi,\quad P_{min}=W\sin\phi$$





問 21）P/Qの値によって次の２つの滑り出し条件が考えられる。

①P/Q小だとQが滑り落ちるから、限界の(最小の)P/Q値が存在する。このとき、斜面に平行及び垂直方向のつり合いを考えると

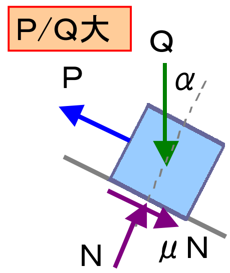
$$P-Q\sin\alpha+\mu N=0,\quad -Q\cos\alpha+N=0$$

$$\rightarrow\quad (P/Q)_{min}=\sin\alpha-\mu\cos\alpha$$

②P/Q大だとQが滑り上がるから、限界の(最大の)P/Q値が存在する。斜面に平行及び垂直方向のつり合いは

$$P-Q\sin\alpha-\mu N=0,\quad -Q\cos\alpha+N=0$$

$$\rightarrow\quad (P/Q)_{max}=\sin\alpha+\mu\cos\alpha$$



問 22）摩擦力の式：$F=\mu N$における垂直力Nが、この場合はブロックの重さとPやTなどの傾斜した力の鉛直成分の和であることに注意する。糸の張力をT、傾角をβと置いて、各ブロックが滑り出す条件式を書くと

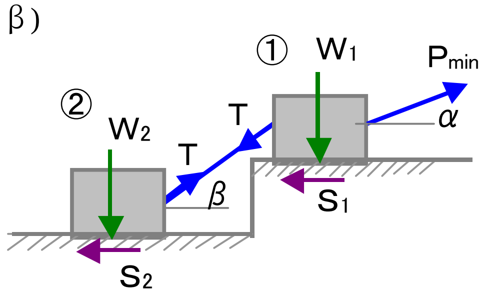
①$P\cos\alpha-T\cos\beta=S_1=\mu(W_1-P\sin\alpha+T\sin\beta)$
②$T\cos\beta=S_2=\mu(W_2-T\sin\beta)$

両式からT，βが消去され、多少整理すると

$$P=\mu(W_1+W_2)\cdot\cos\phi/\cos(\alpha-\phi)$$

したがって、$\alpha=\phi$のときPが最小になり

$$P_{min}=(W_1+W_2)\sin\phi$$

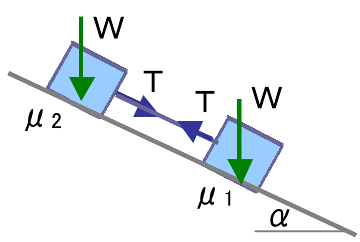


問 23）糸の張力をTと置くと、各ブロックのすべり条件は

上：$W\sin\alpha+T=\mu_2 W\cos\alpha$
下：$W\sin\alpha-T=\mu_1 W\cos\alpha$

これからT，Wが消去でき

$2\tan\alpha=\mu_1+\mu_2$
$\rightarrow\quad \tan\alpha=(\mu_1+\mu_2)/2$

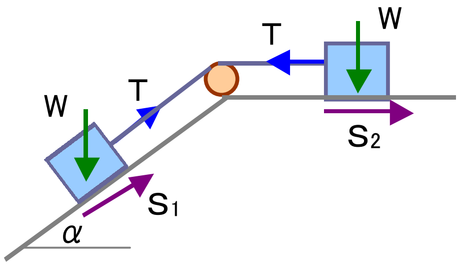


問 24）糸の張力をTとすると力の作用状況は図のようになり、まず水平面上の重りが滑り出す条件から、$T = S_2 = \mu W$ となる。次に斜面上のブロックが滑り出す条件は

$$W\sin\alpha - T = S_1 = \mu W\cos\alpha$$

両式からTを消去して

$$W\sin\alpha = \mu W(1+\cos\alpha)$$
$$\rightarrow \quad \mu = \sin\alpha/(1+\cos\alpha) = \tan(\alpha/2)$$



問 25）棒に作用する圧縮力をTと置くと、壁と床でブロックが滑り出す条件は

壁：$W - T\sin\theta = S_1 = \mu T\cos\theta$
床：$T\cos\theta = S_2 = \mu(W + T\sin\theta)$

$\theta = 45°$ のとき、上の２式は

$$\sqrt{2}W = T(1+\mu)$$
$$\sqrt{2}\mu W = T(1-\mu)$$

両式を辺々除してT及びWが消去でき

$$\mu(1+\mu) = 1-\mu \quad \rightarrow \quad \mu^2 + 2\mu - 1 = 0$$

これを解いて、$\mu = 0.414$