静力学のはじめ（1）

●ベクトル量

・大きさ(ｒ)と方向(θ)の２つの成分で定義される量をベクトル量と呼ぶ。幾何学的にθ方向に向かう大きさｒの矢印で表現される。力学で使う位置、変位、力などの量は、大きさだけでなく方向性が問題とされるから、ベクトル量として扱われる。

・１点Ｐの位置は、大きさと方向の２成分で表現すれば Ｐ(ｒ,θ)と表されるが、ｘｙ直角座標を使えば、点Ｐの座標成分を用いて Ｐ(ｘ,ｙ)と表すこともできる。このとき、両成分の間には互いに次の関係が成立する。

$$r=(x^2+y^2)^{0.5} \qquad x=r\cos\theta$$
$$\theta=\tan^{-1}(y/x) \qquad y=r\sin\theta$$

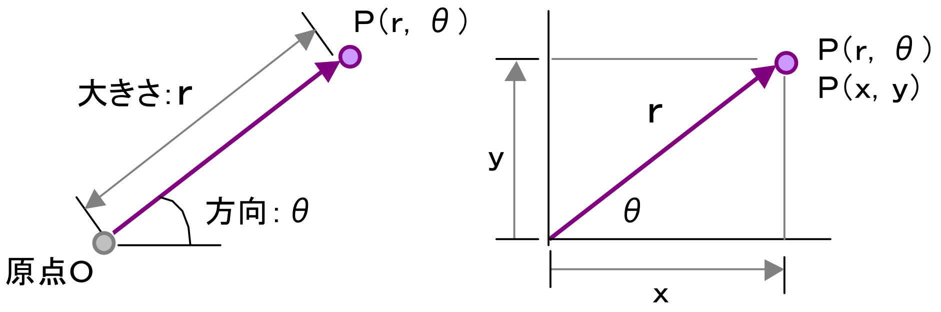

***Fig.1*　ベクトル量（大きさ・方向と座標成分）**

●力の合成

・力は(大きさ)と(方向)をもつベクトル量であるが、加えて、その(着力点)が力の作用状態を決定するもう一つの重要な因子になる。したがって、力はこれら３つの量で完全に定義される。

・物体内の１点に作用する２つの力(ベクトル)は、それら(の矢印)が形成する平行四辺形の対角線の力の作用と等価である。このベクトル和、つまり力の合成の法則を平行四辺形の法則と呼ぶ。後述するが、力は、その作用線の延長上に着力点を移動しても効果は同じである。したがって、２つの力 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の着力点位置が点A,Bのように離れている場合は、両者の延長線が交わる点Ｃに $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を移動してから平行四辺形の法則を適用すれば、点Ｃに合力 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ が定まる。

・平行四辺形を作図する代わりに、力ベクトルを平行移動して矢印の頭としっぽを次々と連ねると、その始点と終点を結ぶ矢印として合成力のベクトルが得られる。これをベクトルの幾何学和という。この場合、合成力の大きさと方向は定まるが、着力点位置は不明である。

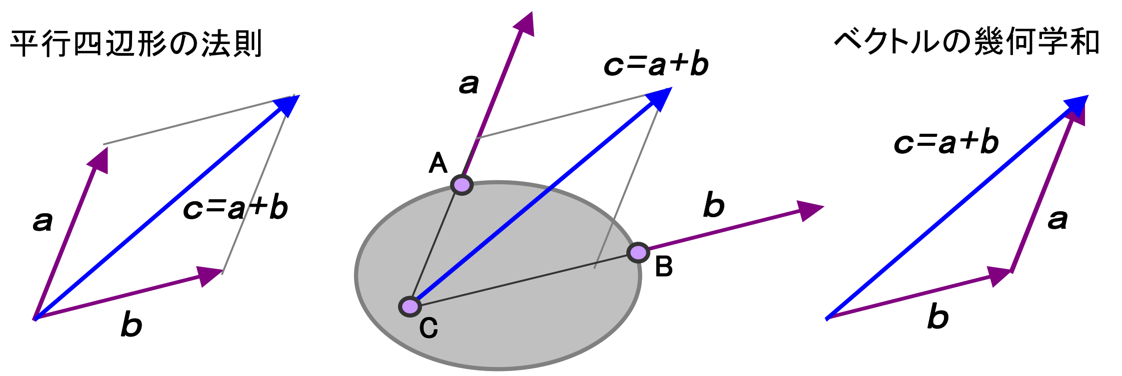

***Fig.2*　力の合成（平行四辺形の法則と幾何学和）**

・物体内の１点に幾つかの力が作用するとき、それらは平行四辺形の法則あるいはベクトルの幾何学和を次々と適用して１つの力に合成することができる。特別な場合として、複数の力が全て同一線上に作用するとき、合成力はこれらの力の代数和で与えられる。つまり合成力の作用方向は与えられた方向で、大きさは単純な加減算で決まる。

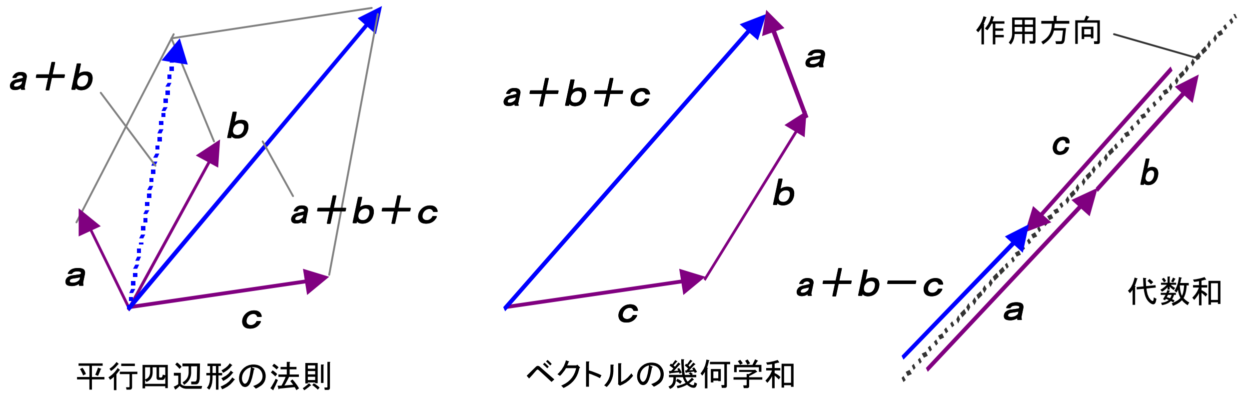

***Fig.3*　力の合成（平行四辺形の法則と幾何学和）**

●力のつり合い則、重ね合わせの法則及び着力点移動

・力のつり合い則：２つの力は、大きさが等しく、作用方向が反対で、同一延長線上にあるとき、つり合い状態にあるという。つり合い状態にある２つの力を合成すると、ベクトルの合成則より、合成力の大きさはゼロになる。逆に、合成力の大きさがゼロのとき、２つの力はつり合い状態にあるといえる。Fig.4(a)で、棒の両端 A,B にはつり合い状態にある２つの力が働き、棒に引張や圧縮の作用を及ぼす。両端に引張力Ｐが作用する棒の左半分のつり合いを考えたとき、点Ａに働くＰにつり合うためには、右半分から左半分に同じ大きさで方向が逆の力Ｓ＝Ｐを作用させる必要がある。Ｐが“外力”であるのに対し、Ｓは棒の内部に作用する力なので“内力”と呼ばれる。

・重ね合わせの法則：１つの力系に、つり合い状態にある他の力系を加えたり、逆に差し引いたりしても、元の力系の性質は変わらない。この法則によると、AB 線に沿って点Ａに力Ｐが働く(b)図の力系において、点Ｂに(AB 線に沿って)大きさ等しく作用方向が反対の力Ｐ'＝Ｐ''＝Ｐ(つり合い状態にある)を重ねて作用させても、力系は変わらない。更に、この状態から、点 A に働く力Ｐと点 B に働く力Ｐ''(これらも同一線上で逆方向に作用する大きさの等しい力だからつり合い状態にある)を取り除いても力系は変わらない。とすると、結果的に点 A に力Ｐが作用する力系と点 B に力Ｐ'(＝Ｐ)が作用する力系は等価である。換言すると、力の着力点位置を作用延長線上で移動しても、力の効果つまり力系の性質は変化しない、と言うことになる。

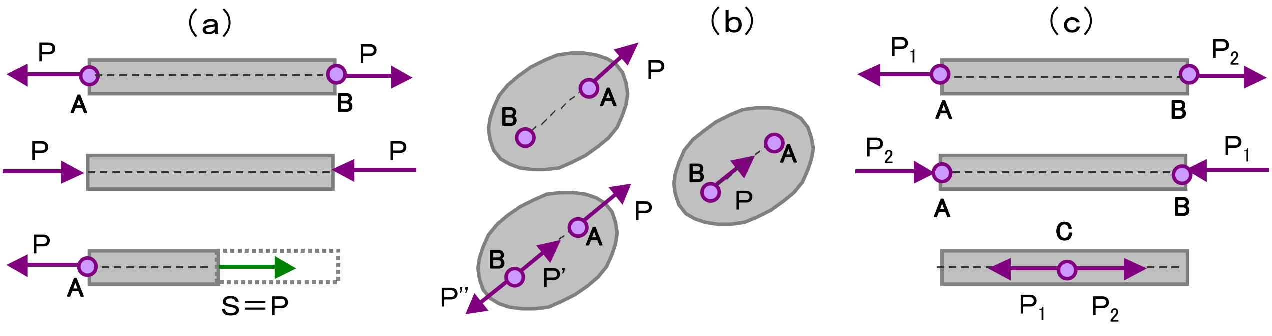

***Fig.4*　力のつり合い則、重ね合わせの法則と着力点**

・注意すべきは、Fig.4(c)で両端に引張力 $P_1=P_2$ が作用する棒 AB を考えたとき、着力点位置を作用線上で任意に変更できるならに、点 A に働く力 P_1 を点 B に、点 B に働く力 P_2 を点 A に移動しても力系は変わらない。その結果、１番目の引張力を受ける棒は２番目の圧縮力を受ける棒と等価ということになるし、$P_1=P_2$ の作用点を３番目の棒のように１点 C に集中させると、棒は実質的に力を受けない状態になる。これから言えることは、着力点移動の法則が適用できるのは力(外力)のつり合いを議論する場合のみに限られるのであって、その力系が作用するときの内力を問題とするときは着力点移動の法則は適用できない。

・複数の力が作用する物体がつり合い状態にあるとき、それらの力ベクトルは、頭としっぽを次々と連ねると（ベクトルの幾何学和をとると）閉じた多角形を形成する。これを“力の多角形”と呼ぶ。Fig.5 で、ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の合力（$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$）と $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}$ の合力（$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}$）は、大きさ等しく作用方向が反対で（合成したらゼロで）、つり合い状態にある。つまり、このことが系全体の力のつり合い状態を表している。力の多角形を描くとき、ベクトルを連ねる順番は関係ないので、多角形の形は一定していない。

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$$

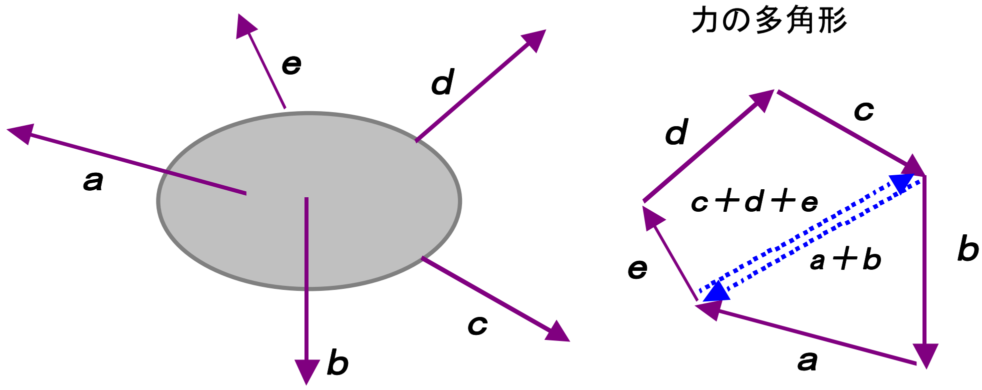

***Fig.5*　複数の力のつり合い（力の多角形）**

●力の成分表示

・平行四辺形の法則を逆に用いると、一つの力は(それを対角とする)任意の２方向の力に分解できる。特別な場合としてｘｙ直角座標方向に分解(投影)すると、力Ｆは(Ｘ,Ｙ)を射影２成分とするベクトル量として定義できる。力Ｆをベクトル量として扱う場合の大きさ｜Ｆ｜と作用方向θは、射影成分(Ｘ,Ｙ)で次のように表示される。

$$|F|=(X^2+Y^2)^{0.5} \qquad \theta=\tan^{-1}(Y/X) \qquad (1)$$

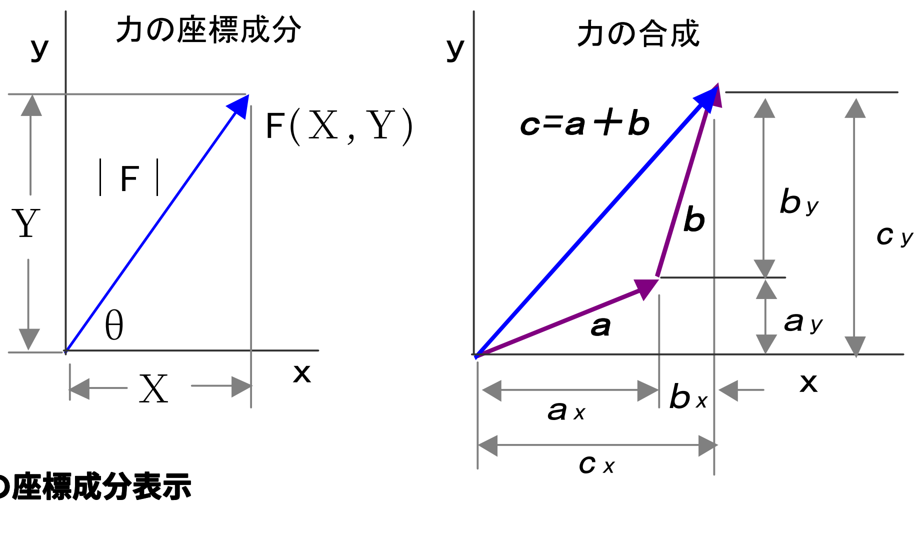

***Fig.6*　力の座標成分表示**

・力をｘｙ成分で表現すると、上述の力の合成則や力のつり合い関係が代数和を伴う式表示で扱うことができる。例えば、Fig.6の２つのベクトル$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$の合成$\boldsymbol{c}$は

$$\boldsymbol{c}(c_x,\ c_y)=\boldsymbol{a}(a_x,\ a_y)+\boldsymbol{b}(b_x,\ b_y)=\boldsymbol{c}(a_x+b_x,\ a_y+b_y)$$

つまり、合成ベクトル$\boldsymbol{c}$の成分は、２つのベクトル成分の代数和で表される。したがって、一般にｎ個の力 $F_1(X_1, Y_1)$, $F_2(X_2, Y_2)$‥ $F_n(X_n, Y_n)$が作用するとき、それらの合成力$P(X, Y)$の成分は次のように表される。

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum X_i$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = \sum Y_i \qquad (2)$$

・物体に作用するｎ個の力F_1, F_2・・F_nがつり合い状態にあり、力の多角形が閉じるということは、それらの合成力Ｐの成分(X, Y)がゼロ、すなわち $X=0$, $Y=0$になることを意味する。したがって、Ｈ＝水平成分、Ｖ＝鉛直成分と改めて書くと、力のつり合い条件式は、一般に次のように表される。

$$\text{x方向：}\ \sum H = \sum X_i = 0$$
$$\text{y方向：}\ \sum V = \sum Y_i = 0 \qquad (3)$$

●モーメント

・レンチでボルトを回転させるとき、先端に同じ大きさの力$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$を作用させても、レンチの軸に直角に作用させた$\boldsymbol{b}$の方が$\boldsymbol{a}$より大きな回転効果を与える。この回転効果の尺度は、力の大きさと回転中心から力の作用線までの垂直距離(アーム長または足の長さ)の積で表され、モーメントと呼ばれる。一般に力の大きさをF、アーム長をｄとしたとき、モーメント量Mは

$$M = F \times d \quad \text{（単位は kN・cm など、力×長さ）}$$

で表される。Mの正負は“右回りか、左回りか”で決めるが、どちらを正とするかの約束は一定してない。力Ｆがゼロでないとき、アーム長ｄがゼロ、つまりＦの作用線上にモーメント中心があるときのみ、Mはゼロになる。

・２つの力$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$の合力$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$の点Oに関するモーメント$M_c = c \times l_c$（ｃは$\boldsymbol{c}$の大きさ）は、各力$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$の点Oに関するモーメント$M_a = a \times l_a$, $M_b = b \times l_b$の和に等しい。拡張すると、一般にｎ個の力F_1, F_2・・F_n の合力をＰとすると、Ｐの点Oに関するモーメントM_p は、各力の点Oに関するモーメントM_1, M_2,・・,M_nの代数和に等しい。

$$M_p = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i \qquad (4)$$

・力F_i のモーメントM_iを計算する場合は、モーメント中心の点Oを原点としてｘｙ座標をとり、F_i を２成分(X_i, Y_i)に分解した方が便利である。F_i の着力点Aの座標を(x_i, y_i)とすると、上のモーメント和の考え方より

$$M_i = F_i \times d = Y_i \times x_i - X_i \times y_i \qquad (5)$$

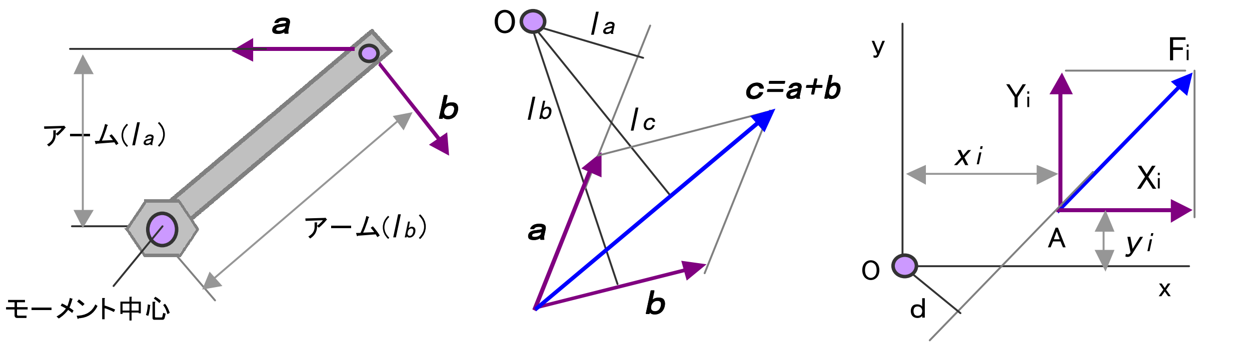

Fig.7　モーメント

●**力のつり合い方程式**

・式(4)から、複数の力が作用する系のモーメント和がゼロになるのは、①モーメント中心が合力の作用線上にあるときか、②合力が元々ゼロで系がつり合い状態にあるとき、と言える。例えば点Aに複数の力が働く Fig.8(a)の系で、点Bを中心とするモーメント和がゼロなら、合力がゼロか、合力が AB 線上にある。しかし、もし、点C(AB 線上でない)を中心とするモーメント和もゼロなら、合力がゼロ(つり合い状態)の場合しかあり得ない。(合力が AC 線と AB 線上に同時に存在することはない) この２つの条件を式表示すると

$$\sum (M_B)_i=0 \qquad \sum (M_C)_i=0 \qquad (6)$$

これらは式(3)と等価であり、力のつり合い状態を表す方程式である。

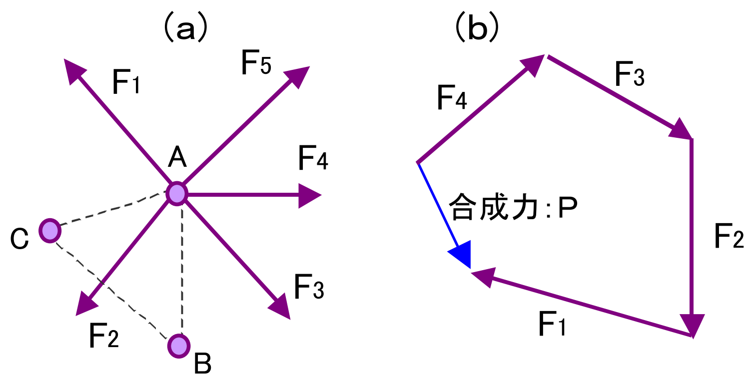

Fig.8 **力のつり合い（力とモーメントの条件）**

・さて、複数の力 $F_1, F_2 \cdot\cdot F_n$ が作用する力系に対しては、一般に次の３つの状況が考えられる。①図 8(b)のように力の多角形が閉じない場合、力系はつり合い状態になく、合成力 $P(=F_1+F_2+F_3+F_4)$ をもつ。②(c)図のように力の多角形が閉じる場合、力系を任意の２組の力に分けると、それら部分的な合成力は大きさ等しく($P_1=P_2=P$)作用方向が反対になる。ただし、それらの作用線が一致しない(間隔 d をもつ)と偶力 $P\times d$ を形成する。(偶力については別の機会に述べる) ③力の多角形が閉じ、かつ $d=0$ のとき、力系はつり合い状態にある。

・以上のことを力の成分表示を用いて表現すると、系に作用する力の x y 成分の和：$X=\sum X_i, Y=\sum Y_i$ がともにゼロならば、力系全体に対する合成力は存在せず、②か③の状態になる。また、もし力系全体のモーメント和：$M_0=\sum (M_0)_i$ がゼロならば、偶力は存在せず、③の状態になる。したがって、系がつり合い状態にあるための条件式は、式(3)と式(5)の組み合わせとして

$$\sum X_i = 0, \qquad \sum Y_i = 0, \qquad \sum (M_0)_i=0 \qquad (7)$$

のように表示される。これが一般に用いられる力のつり合い方程式である。

・証明は略すが、同一線上に存在しない３点 A,B,C に関するモーメント和が全てゼロのときも力系はつり合い状態にある。したがって、式(7)の代わりに、全てをモーメント条件で表した

$$\sum (M_A)_i=0, \qquad \sum (M_B)_i=0, \qquad \sum (M_C)_i=0 \qquad (8)$$

も力のつり合い方程式と考えてよい。式(7)や式(8)に含まれる３つの独立な条件式は、力系のつり合い状態を保証する必要かつ十分な条件であり、この解より反力等に関する３つの未知数が知れる。拘束状態が丁度３つの未知数で記述できるような力系を静定構造といい、その問題を解くためには力・モーメントに関わらず３つの条件式を整えればよい。例えば、単純梁は２つの支点で支えられ、ピン支点には２成分の反力、ローラー支点には垂直１成分の反力、合計３成分の拘束反力を有する。

●作用力と反力、摩擦

・物体に作用する外力は支持点に力を及ぼす。と同時に、物体は支持点から大きさが等しく作用方向が反対の反力を受ける。つまり、(支持点への)作用力と(物体への)反力は、大きさが等しく方向が反対の２つの力である。(Newton の第３法則)

・物体のつり合いを考えるとき、我々は支持部分を取り除いて、代わりに物体に作用する反力を矢印で置き換える方法を取る。Fig.8 の例で、ボールには自重Wが中心点 C に作用する他に、糸 BC と壁 AB から２つの反力が作用する。糸は点 C に結ばれて、その方向の力しか伝達しないから、BC に平行で点 C に作用する反力Ｓに置き換わる。壁が理想的に滑らかなら、ボールから壁への作用力は壁に垂直であるから、壁 AB に置き換えるべき反力Ra は、接触点 A に作用する水平力で、その作用線は点 C を通る。反力ＳやRa の大きさは、作用力Wとともに力のつり合いを吟味して決定される。静力学の問題を解く場合にまず必要な作業は、このような作用力と反力の作用形態を知る図(力ベクトルの図、free-body diagram)を描くことにある。

・なお、作用力Wは大きさ、方向とも既知の矢印で描けるから、反力ＳとRa の方向に基づいて力の多角形を描けば、両者の値が決定する。($S = W/\cos\theta$, $Ra = W\tan\theta$)

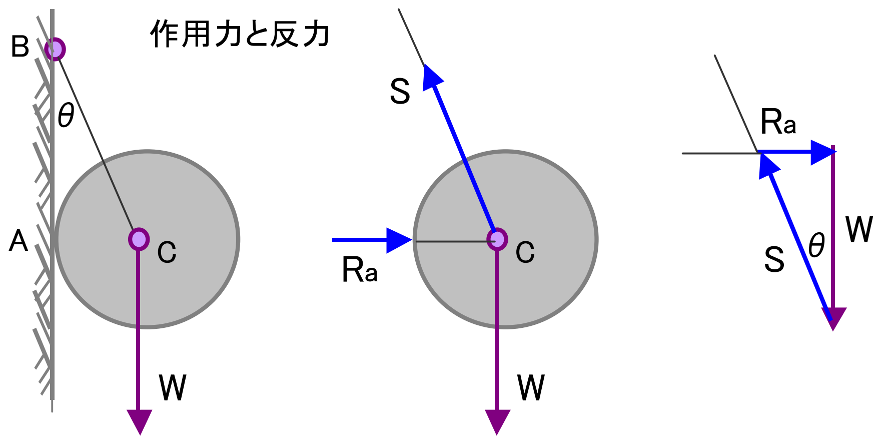

***Fig.8*　作用力と反力**

・壁面が理想的に滑らかでない場合は(通常は完全には滑らかでない)、接触面に摩擦と呼ばれる滑りを阻止する力が現れる。例えば、Fig.9 で、垂直力Ｎで圧縮されている２枚の板を考えると、接触面の摩擦に打ち勝って板が滑るためには、ある大きさの力Ｆを板方向に作用させる必要がある。この摩擦に関しては、種々の実験を行った結果、以下の法則があることが知られている。

①摩擦力の大きさは接触面の面積と無関係である。
②摩擦力の大きさは垂直力Ｎの大きさに比例する。
③すべり速度が小さい場合は、摩擦力は実質的に速度に無関係である。

・したがって、摩擦の法則は以下のように式表示できる。

$$F = \mu N \qquad (9)$$

ここで、μは摩擦係数と呼ばれる。板を滑らすとき、滑り出しに必要なＦの値は、滑り始めて滑りを持続する時に必要なＦの値より大きい。前者の摩擦を静摩擦、後者を動摩擦と呼ぶ。摩擦係数の値は、材料の性質と接触面の状況によって異なる。

・摩擦が反力の特性に如何なる影響を及ぼすかを知るために、自重が無視できる箱に力Ｐをαの角度で加えて滑らせる問題を考える。つり合い条件から考えると、箱と床の接触面には作用力Ｐと大きさが同じで作用方向が逆の反力Ｒが働くと見てよい。そして、反力Ｒは床面に平行・垂直に働く２成分の力Ｆ(摩擦力)とＮ(垂直力)に分解できるので、両者の間には $F/N = \tan\alpha$ の関係

が成り立つ。作用力Ｐをある限界の角度φまで傾けたとき滑りが生じたとすると、上と同じつり合い条件により、反力の２成分の間には Ｆ/Ｎ＝tanφ が成り立ち、これが滑りの限界だとすると式(9)より Ｆ/Ｎ＝μ でもある。したがって、両関係から tanφ＝μ を得る。すなわち、摩擦係数は滑りが生じたときの作用力(反力)の傾斜角の正接で与えられ、φを摩擦角と呼ぶ。

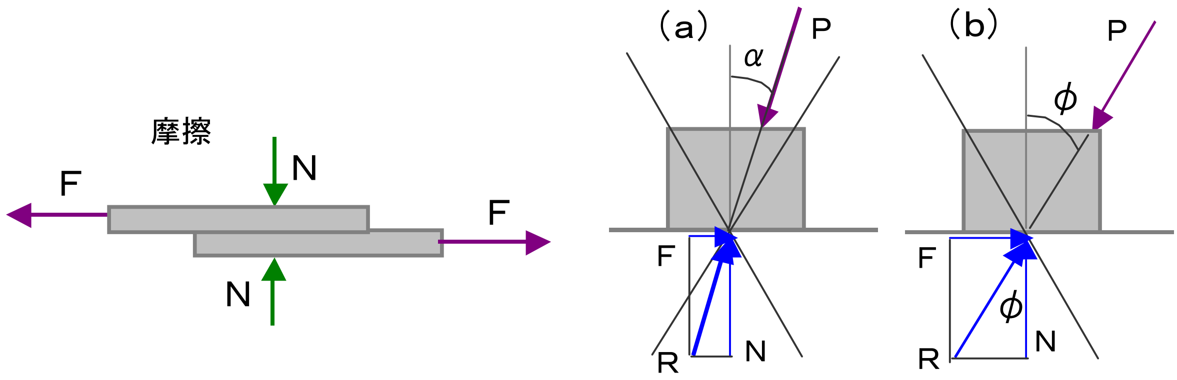

Fig.9　摩擦（摩擦係数、摩擦角）