

## 第5章 演習問題及び解答

### 【演習 5.1】不静定問題

問 1) 次の 2 つのケ - スについて、2 つの鋼線中に生じる引張力  $T_1, T_2$  を求めよ。ただし、AB は剛性棒とし、結合は全てピンとする。

解) a) の解

点 A 回りのモ - メントつり合い

$$T_1 \cdot L_1 + T_2 \cdot L_2 = W \cdot L$$

点 D, C の変位  $\delta_1, \delta_2$  (鋼線の長さ  $h$ ) は

$$\delta_1 = T_1 h / A E, \quad \delta_2 = T_2 h / A E$$

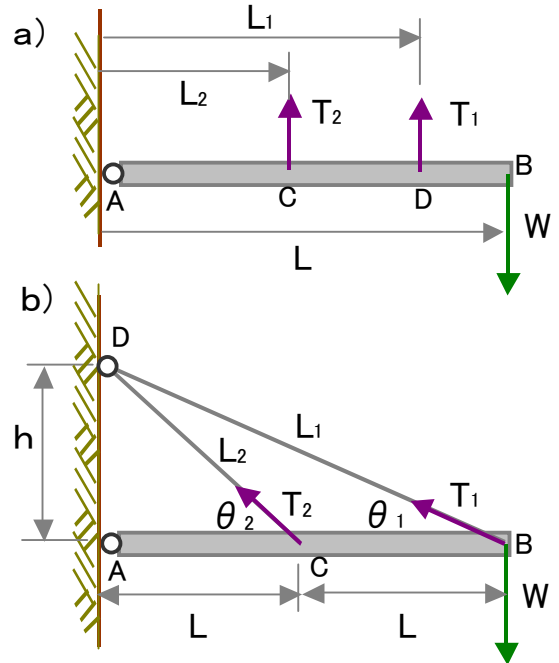
剛性棒の条件から、次の比例関係を得る。

$$\delta_1 : \delta_2 (= T_1 : T_2) = L_1 : L_2$$

$$T_2 = (L_2 / L_1) \times T_1$$

を解いて

$$T_1 = \frac{W L_1 L}{L_1^2 + L_2^2} \quad T_2 = \frac{W L_2 L}{L_1^2 + L_2^2}$$



b) の解

点 A 回りのモ - メントつり合い ( $T_1, T_2$  が水平となす角を  $\theta_1, \theta_2$  とする)

$$2 T_1 \sin \theta_1 \cdot L + T_2 \sin \theta_2 \cdot L = W \cdot 2L$$

各鋼線の伸び量は、 $L_1, L_2$  に対応して

$$\delta_1 = T_1 L_1 / A E, \quad \delta_2 = T_2 L_2 / A E$$

点 B, C の鉛直変位を  $\delta_1, \delta_2$  とすると、これらは  $\delta_1, \delta_2$  との間に次の関係がある。

$$\delta_1 \sin \theta_1 = \delta_2 \sin \theta_2$$

$$\text{また} \quad \delta_1 : \delta_2 = 2 : 1$$

以上の 4 式を組み合わせればよく、結果のみ示すと

$$T_1 = \frac{4 L_1 L_2^3 W}{h(L_1^3 + 4 L_2^3)} \quad T_2 = \frac{2 L_1^3 L_2 W}{h(L_1^3 + 4 L_2^3)}$$

問 2) 両端を剛性壁に固定した一様断面の棒 AB 上の 1 点 C に軸荷重 P を図の方向に作用させるとき、両端の反力  $R_1, R_2$  を求めよ。

解) 点 C で力のつり合いを考えて

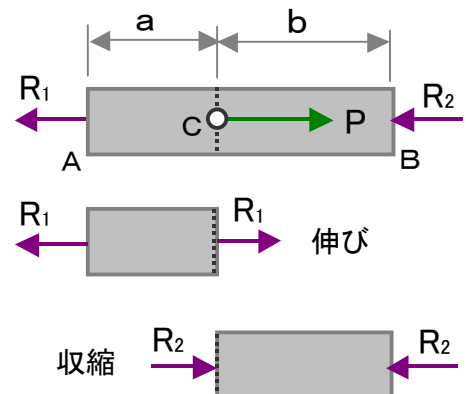
$$R_1 + R_2 = P$$

AC 間の伸び量と BC 間の収縮量は絶対値が等しく

$$R_1 \times a / A E = R_2 \times b / A E$$

式を解いて ( $L = a + b$  と置く)

$$R_1 = (b/L) P, \quad R_2 = (a/L) P$$



## 【演習 5.2】熱応力

問 1) 鉄道レール ( $E = 206\text{kN/mm}^2$ ,  $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ ) を気温  $25^\circ\text{C}$  のときに長距離にわたり溶接した。気温が  $-5^\circ\text{C}$  まで降下したときレールに発生する応力を求めよ。

解) 気温低下による収縮ひずみ:  $\epsilon_T = (t - t_0) \alpha = 1.2 \times 10^{-5}/^\circ\text{C} \times 30 = 3.6 \times 10^{-4}$   
 $\sigma_T = E \cdot \epsilon_T = 742 \times 10^{-4} \text{kN/mm}^2 = 74.2 \text{MPa}$

問 2) 図のように断面が等しい 3 本の棒がピン結合されているとき、 $100^\circ\text{C}$  の温度上昇によって各棒に生じる熱応力を求めよ  
 ( $\theta = 30^\circ$ ,  $E$  と  $A$  は上と同じ)。

解) 中央は短く、両端は長いから、温度上昇により中央棒は引張られる。その引張力を  $X$  と置くと、力のつり合いより両側棒には  $X/2\cos\theta$  なる圧縮力が作用する。  
 熱膨張による伸びと軸力による伸縮を合成すると

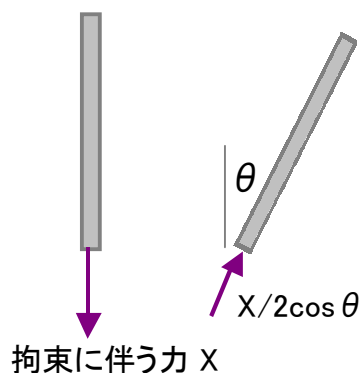
$$\delta_1 (\text{中央}) = \alpha \Delta t \cdot L + X L / A E$$

$$\delta_2 (\text{両側}) = \alpha \Delta t \cdot L / \cos\theta - X L / 2 A E \cos^2\theta$$

これと棒が結合している条件:  $\delta_2 = \delta_1 \cos\theta$  を組み合わせると引張力  $X$  が

$$X = \frac{\alpha \Delta t A E (1 / \cos^2\theta - 1)}{1 + 1 / (2 \cos^3\theta)} = 0.188 \alpha \Delta t A E = 0.0465 A \quad (X : \text{kN}, A : \text{mm}^2)$$

$$(\text{中央}) = X / A = 0.0465 \text{kN/mm}^2 = 46.5 \text{MPa}, \quad (\text{両側}) = -X / (2 A \cos\theta) = -26.8 \text{MPa}$$



問 3) 図の段付き棒の温度を  $50^\circ\text{C}$  高めたとき、棒の各部に生じる熱応力を求めよ。ただし、 $E$  と  $A$  は上と同じで、 $3L_1 = L_2$ ,  $2A_1 = A_2$  とする。

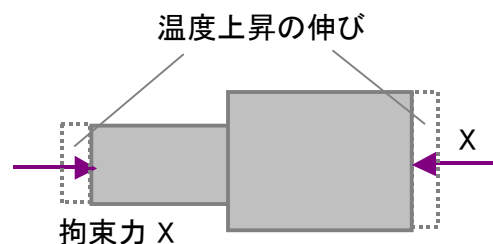
解) 温度上昇による伸びを抑えるために、壁から棒に作用する軸圧縮力を  $X$  と置くと

$$X \text{ による収縮: } \frac{X}{E} \left( \frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2} \right) = \text{温度上昇による伸び: } \alpha \Delta t (L_1 + L_2)$$

$$X = \frac{\alpha \Delta t E A_1 (1 + L_2 / L_1)}{1 + (L_2 / L_1) (A_1 / A_2)} = \frac{8}{5} \alpha \Delta t E A_1$$

$$\sigma_1 = X / A_1 = (8/5) \alpha \Delta t E = 0.198 \text{kN/mm}^2 = 198 \text{MPa},$$

$$\sigma_2 = X / A_2 = (4/5) \alpha \Delta t E = 0.0989 \text{kN/mm}^2 = 98.9 \text{MPa},$$



### 【演習 5.3】曲げ応力

問 1) 図のはりに生じる最大曲げ応力を求めよ。ただし、  
 $P = 5.0\text{kN}$  ,  $a = 20\text{cm}$  とする。

- (a) 長方形断面の単純梁 (幅  $10\text{cm}$  , 高さ  $20\text{cm}$ )  
 (b) 円形断面の片持ち梁 (直径  $8\text{cm}$ )

解) a) 長方形断面:  $I = b h^3 / 12$  (幅  $b$  , 高さ  $h$ )  
 最大曲げモーメント:  $M_{\max} = P a$

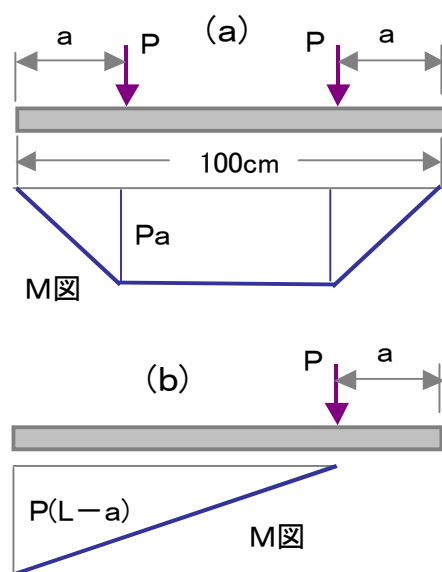
$$\sigma = \frac{Pa}{bh^3/12} \times \frac{h}{2} = \frac{6Pa}{bh^2}$$

$$= 0.150\text{kN/cm}^2 = 1.50\text{MPa}$$

b) 円形断面:  $I = d^4 / 64$  (直径  $d$ )  
 最大曲げモーメント:  $M_{\max} = P(L - a)$

$$\sigma = \frac{P(L-a)}{\pi d^4 / 64} \times \frac{d}{2} = \frac{32P(L-a)}{\pi d^3}$$

$$= 7.96\text{kN/cm}^2 = 79.6\text{MPa}$$



問 2)  $W = 30.0\text{kN}$  の車輪がスパン  $L = 5\text{m}$  の単純支持梁の上を移動する。梁の断面が外寸法  $B = 40\text{cm}$  , 肉厚  $t = 2\text{cm}$  の中空正方形であると、はりに生じる最大曲げ応力はいくらか。また、これと同じ最大曲げ応力を与える中実正方形断面の梁の外寸法はいくらか。

解) 左端から車輪の位置  $x$  を測ると、曲げモーメント分布はその点で頂点を示し、 $M = W(L - x)x/L$  となる。この  $M$  は  $x = L/2$  (車輪が梁中央) のとき最大値を取り、 $M_{\max} = WL/4$  である。正方形の断面二次モーメントは、中実、中空断面に対して

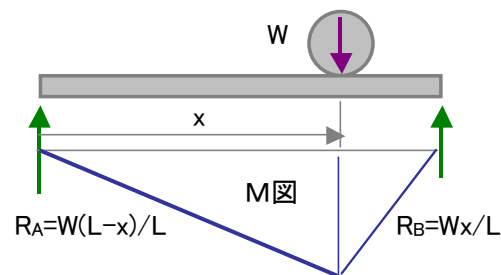
$$I(\text{中実}) = B^4 / 12 \quad I(\text{中空}) = B^4 / 12 - (B - 2t)^4 / 12$$

であり、最大曲げ応力は  $y = B/2$  で発生する。以下、数値計算を行うと、まず中空断面では

$$= (M/I)(B/2) = (37.5/7.33 \times 10^{-4}) \cdot 0.2 = 10230\text{kN/m}^2 = 10.2\text{MPa}$$

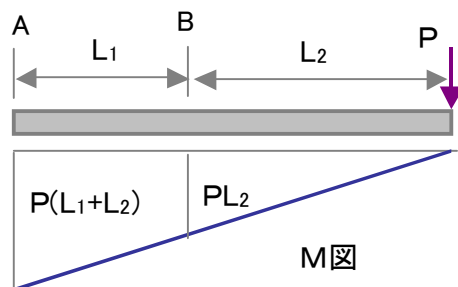
これと同じ曲げ応力を発生する中実断面の  $B$  は

$$= (M/B^4/12)(B/2) = 6M/B^3 = 6 \times 37.5/B^3 = 10230$$



$$B^3 = 0.0220\text{m}^3, B = 28.0\text{cm}$$

問 3) 図の段付き丸棒の片持ちはりにおいて、A, B に生じる最大曲げ応力を等しくするためには、 $D_1$  と  $D_2$  の間にどのような関係が必要か。また、はりを段付きとせず、体積の等しい 1 本の丸棒に置き換えたとき、これに生じる最大曲げ応力と上の A, B の最大曲げ応力を比較せよ。



解) 点A, 点B の M, I 及び最大曲げ応力 は

$$I_A = D_1^4/64, M_A = P(L_1 + L_2) \quad A = (M_A / I_A) \cdot D_1/2 = 32 P (L_1 + L_2) / D_1^3$$

$$I_B = D_2^4/64, M_B = P L_2 \quad B = (M_B / I_B) \cdot D_2/2 = 32 P L_2 / D_2^3$$

となるから、 $A = B$  として

$$(D_1/D_2)^3 = (L_1 + L_2)/L_2$$

体積が等しい1本の丸棒(直径D)に置き換えるということは

$$D_1^2 L_1/4 + D_2^2 L_2/4 = D^2 (L_1 + L_2) \quad D = \{(D_1^2 L_1 + D_2^2 L_2)/(L_1 + L_2)\}^{0.5}$$

である。最大曲げ応力は点Aで生じ  $= 32 P (L_1 + L_2) / D^3$  となる。上と比較すると

$$A' = (D/D_1)^3, \quad B' = (D/D_2)^3 L_2 / (L_1 + L_2) = (D/D_1)^3$$

問4) 図の溝形の梁( $t = 50\text{mm}$ ,  $h = 250\text{mm}$ ,  $b = 500\text{mm}$ ) が曲げを受けるとき、圧縮と引張の曲げ応力の比を求めよ。

解) 曲げ応力の式:  $\sigma = (M/I)y$  で圧縮と引張の違いは中立軸からの距離  $y$  だけである。そこで、中立軸の位置を上縁(圧縮縁)から  $y_c$  と置くと、

溝を含む全断面: 面積  $A_1 = 1250\text{cm}^2$ 、上縁からの図心位置  $12.5\text{cm}$

溝部分だけ: 面積  $A_2 = 800\text{cm}^2$ 、上縁からの図心位置  $10.0\text{cm}$

断面一次モーメント:  $(A_1 - A_2) \times y_c = 450 \times y_c = 1250 \times 12.5 - 800 \times 10 \quad y_c = 16.9\text{cm}$

となり、引張縁からの距離  $y_t = 8.1\text{cm}$  であるから、応力比  $= y_t / y_c = 2.09$

問5) 水路のダムが図のような案内レールAおよびB間に厚さ  $t = 6\text{cm}$ 、幅  $B = 30\text{cm}$  の厚板を固定する構造になっている。ダムの水深  $H = 1.5\text{m}$  のとき、この厚板に生じる最大曲げ応力を求めよ。ただし、C点には何の支点もないとする。

解) 下端から  $x$  位置の曲げモーメントを

$M_x$  と置くと、下端から  $x$  位置の水圧が  $w(H - x)$  であることに注意して(積分は  $0 \sim x$ )

$$M_x = \int_0^x w(H - x) dx = w x^2 (3H - x) / 6$$

の3次曲線になる。 $x = H$ で最大値をとり、その値は次のようになる。

$$M_{\max} = w H^3 / 3$$

最大値だけを求めるなら、上のよう  
な計算をしなくても、水圧分布から

$M_{\max} = \text{水圧合力(分布の面積)}$

$\times$  点Bからの図心位置

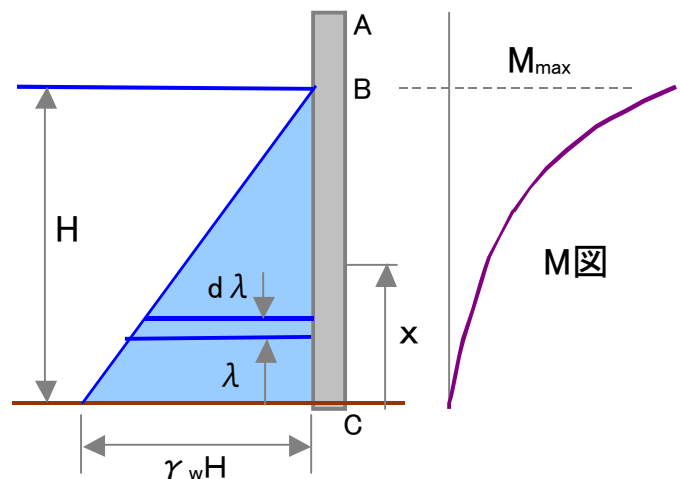
$$= (w H^2 / 2) \times (2H/3) = w H^3 / 3$$

として得られる。実際に数値を入れると、幅  $B = 30\text{cm}$ の厚板に作用する曲げモーメントは

$$M_{\max} = (w H^3 / 3) \times B = \{9.8\text{kN/m}^3 \times (1.5\text{m})^3 / 3\} \times 0.3\text{m} = 3.31\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$I = B t^3 / 12 = 0.3\text{m} \times (0.06\text{m})^3 / 12 = 5.40 \times 10^{-6}\text{m}^4$$

$$= (M_{\max} / I) \times t / 2 = 3.31 / 5.40 \times 10^{-6} \times 0.06 = 1.84 \times 10^4\text{kN/m}^2 = 18.4\text{MPa}$$



#### 【演習 5.4】組み合わせ梁

問 1) 図のように、幅  $b = 75\text{mm}$  , 高さ  $h = 150\text{mm}$  の長方形断面の木製の梁の上下面に、同じ幅で厚さ  $t = 12.5\text{mm}$  の鋼板を張って補強した。この梁を両端支持梁 ( スパン :  $3\text{m}$  ) として使用し、全長に等分布荷重  $40\text{kN/m}^2$  を載荷したとき、鋼板及び木材に生じる曲げ応力を求めよ。鋼及び木材の弾性率は  $200\text{kN/mm}^2$  及び  $10.3\text{kN/mm}^2$  とする。

解) 梁に作用する線荷重は  $q = 40\text{kN/m}^2 \times 0.075\text{m} = 3\text{kN/m}$  だから、中央の最大曲げモーメントは  $M_{\max} = (qL^2/8) = 3\text{kN/m} \times (3\text{m})^2/8 = 3.38\text{kN} \cdot \text{m}$  となる。木材部分の断面二次モーメントを  $I_w$ 、鋼板の断面二次モーメントを  $I_s$  と置くと

$$I_w = b h^3/12 = 2110\text{cm}^4 \quad I_s = \{ b t^3/12 + b t (h/2 + t/2)^2 \} \times 2 = 1240\text{cm}^4$$

だから、梁全体を木材と見なした場合の断面二次モーメント  $I_0$  は、木材及び鋼板の弾性率を  $E_w$  ,  $E_s$  と置いて

$$\begin{aligned} E_w \times I_0 &= 10.3 \times I_0 \\ &= E_w \times I_w + E_s \times I_s = 10.3 \times 2110 + 200 \times 1240 = 270000 \\ I_0 &= 26200\text{cm}^4 \end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned} \sigma_w &= (338/26200) \times 7.5 = 0.0968\text{kN/cm}^2 = 968\text{kN/m}^2 = 968\text{kPa} = 0.968\text{MPa} \\ \sigma_s &= (338/26200) \times (7.5 + 1.25) \times (E_s/E_w) = 2.19\text{kN/cm}^2 = 21900\text{kN/m}^2 = 21.9\text{MPa} \end{aligned}$$

問 2) 図の断面の鉄筋コンクリート梁 (  $b = 25\text{cm}$  ,  $h = 40\text{cm}$  ,  $t = 2.50\text{cm}$  , 16mm鉄筋  $\times 5$ 本 ) が両端支持梁 ( スパン :  $6\text{m}$  ) として使用されている。荷重は梁の自重の他に  $12.4\text{kN/m}$  の等分布荷重を考えるとすると、鉄筋及びコンクリートに生じる曲げ応力はいくらか。ただし、コンクリートの単位体積重量  $\gamma_c = 23.5\text{kN/m}^3$  , 弾性率比  $n = 15$  とする。

解) 面倒なので、解答は省略する。下の答えを参考に各自でやること。

( 3 年の鉄筋コンクリート工学を勉強してからやっても遅くはない )

答えは、コンクリートの曲げ応力  $\sigma_c = 9.02\text{MPa}$  , 鉄筋の曲げ応力  $\sigma_s = 189\text{MPa}$