第４章　演習問題及び解答

【演習４.１】一般化したフックの法則

問１）長さ $L=50cm$、１辺 $d=4cm$ の正方形断面の棒（$E=2.60kN/mm^2$, $\nu=0.25$）を深さ $h=500m$ の水中に沈めたとき、棒の辺長変化量と体積変化量はいくらか。

解）全て圧縮を正として扱う。体積 $V_0=16cm^2\times50cm=800cm^3$

水圧 $p=9.8\times500=4900kN/m^2=4.90\times10^{-3}kN/mm^2$, $K=E/3(1-2\nu)=1.73kN/mm^2$

$e=p/k=2.83\times10^{-3}$ → $\Delta V=eV_0=2.26cm^3$

$\varepsilon=e/3=0.943\times10^{-3}$ → $\Delta L=0.0471cm$, $\Delta d=3.77\times10^{-3}cm$

または、

$\varepsilon=\{p-\nu(p+p)\}/E=(1-2\nu)/E$ → $e=3\varepsilon$ の順に計算してもよい。

問２）長さ50cm, 直径20cm の円筒供試体の軸方向に 29.0MPaの引張応力、直径方向に8.50MPa の圧縮応力が作用する時、軸方向および直径方向の伸縮量を求めよ。
（$E=35.4kN/mm^2$, $\nu=0.25$）

解）軸方向をｘ軸とし、$1MPa=1\times10^{-3}kN/mm^2$ であることに注意して

$\varepsilon_x=\{29.0-0.25(-8.50-8.50)\}\times10^{-3}/35.4=9.39\times10^{-4}$ → $\Delta L=0.470mm$

$\varepsilon_y=\varepsilon_z=\{-8.50-0.25(29.0-8.50)\}\times10^{-3}/35.4=-3.85\times10^{-4}$ → $\Delta d=-0.0770mm$

ついでに、体積ひずみと体積変化量を求めると、$V=1.57\times10^4cm^3$ より

$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=1.69\times10^{-4}$ → $\Delta V=2.65cm^3$

問３）$a=20cm, b=25cm, t=5cm$ の板に $F_x=245kN$, $F_y=320kN$ の引張力が作用する時、各辺長の変化量と体積変化量を求めよ。（E,ν は上と同）

解）$\sigma_x=245000/(250\times50)=19.6N/mm^2$, $\sigma_y=320000/(200\times50)=32.0N/mm^2$, $\sigma_z=0$

$\varepsilon_x=(19.6-0.25\times32.0)\times10^{-3}/35.4=3.28\times10^{-4}$ → $\Delta a=0.0656mm$

$\varepsilon_y=(32.0-0.25\times19.6)\times10^{-3}/35.4=7.66\times10^{-4}$ → $\Delta b=0.192mm$

$\varepsilon_z=(0-0.25\times(32.0+19.6))\times10^{-3}/35.4=-3.64\times10^{-4}$ → $\Delta t=-0.0182mm$

$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=7.30\times10^{-4}$ → $\Delta V=1.83cm^3$（$V=2500cm^3$）

問４）１辺の長さが 2cmの立方体を高圧容器に入れて $p=8.70MPa$ の等方圧力を加えたところ、辺長が 4.56/1000mm 縮んだ。$\nu=0.25$ として体積ひずみと弾性率 E を求めよ。

解）$\varepsilon=-4.56\times10^{-3}/20=-2.28\times10^{-4}$, $e=3\varepsilon=-6.84\times10^{-4}$

$K=p/e=8.70\times10^{-3}kN/mm^2/6.84\times10^{-4}=12.7kN/mm^2$

→ $E=3(1-2\nu)K=19.1kN/mm^2$

問５）右図の直方体に以下の組み合せ応力が作用するときの各辺長の変化量と体積変化量を求めよ。（$E=28.4\mathrm{kN/mm^2}$, $\nu=0.25$，応力の単位は MPa）

ａ）$\sigma_x=5.20$, $\sigma_y=2.30$, $\sigma_z=3.40$

ｂ）$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-2.70$

ｃ）$\sigma_x=-4.40$, $\sigma_y=\sigma_z=1.80$

ｄ）$\sigma_x=10.5$, $\sigma_y=-8.20$, $\sigma_z=4.30$

解）$V=3.0\times10^4\mathrm{cm^3}$, $1\,\mathrm{MPa}=1\times10^{-3}\mathrm{kN/mm^2}$ であることに注意して

（計算途中で桁数を略さないように、常に３桁以上の数字で計算処理すること）

ａ）$\varepsilon_x=\{5.20-0.25(2.30+3.40)\}\times10^{-3}/\ 28.4\ =1.33\times10^{-4}\ \rightarrow\ \Delta a=6.65\times10^{-3}\mathrm{cm}$

$\varepsilon_y=\{2.30-0.25(5.20+3.40)\}\times10^{-3}/\ 28.4\ =5.28\times10^{-6}\ \rightarrow\ \Delta b=1.58\times10^{-4}\mathrm{cm}$

$\varepsilon_z=\{3.40-0.25(2.30+5.20)\}\times10^{-3}/\ 28.4\ =5.37\times10^{-5}\ \rightarrow\ \Delta c=1.07\times10^{-3}\mathrm{cm}$

$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=1.92\times10^{-4}\ \rightarrow\ \Delta V=5.76\mathrm{cm^3}$

ｂ）水中の物体のように、全方向から一様な圧縮応力（等方圧縮）を受ける状態である。

$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z$

$=\{-2.70-0.25(-2.70-2.70)\}\times10^{-3}/\ 28.4\ =-4.75\times10^{-5}$

$\rightarrow\ \Delta a=-2.38\times10^{-3}\mathrm{cm},\ \Delta b=-1.43\times10^{-3}\mathrm{cm},\ \Delta c=-0.95\times10^{-3}\mathrm{cm}$

$e=\varepsilon\times3=-1.43\times10^{-4}\ \rightarrow\ \Delta V=-4.29\mathrm{cm^3}$

ｃ）$\varepsilon_x=\{-4.40-0.25(1.80+1.80)\}\times10^{-3}/\ 28.4\ =-1.87\times10^{-4}\ \rightarrow\ \Delta a=-9.35\times10^{-3}\mathrm{cm}$

$\varepsilon_y=\varepsilon_z=\{1.80-0.25(-4.40+1.80)\}\times10^{-3}/\ 28.4\ =8.63\times10^{-5}$

$\rightarrow\ \Delta b=2.59\times10^{-3}\mathrm{cm},\ \Delta c=1.73\times10^{-3}\mathrm{cm}$

$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=-0.14\times10^{-4}\ \rightarrow\ \Delta V=-0.42\mathrm{cm^3}$

ｄ）$\varepsilon_x=\{10.5-0.25(-8.20+4.30)\}\times10^{-3}/\ 28.4\ =4.04\times10^{-4}\ \rightarrow\ \Delta a=2.02\times10^{-2}\mathrm{cm}$

$\varepsilon_y=\{-8.20-0.25(10.5+4.30)\}\times10^{-3}/\ 28.4\ =-4.19\times10^{-4}\ \rightarrow\ \Delta b=-1.26\times10^{-2}\mathrm{cm}$

$\varepsilon_z=\{4.30-0.25(10.5-8.20)\}\times10^{-3}/\ 28.4\ =1.31\times10^{-4}\ \rightarrow\ \Delta c=0.262\times10^{-2}\mathrm{cm}$

$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=1.16\times10^{-4}\ \rightarrow\ \Delta V=3.48\mathrm{cm^3}$

【演習４.２】平面応力と平面ひずみ

問１）平面内で $\sigma_x=83.8\mathrm{MPa}$, $\sigma_y=51.0\mathrm{MPa}$, $\tau_{xy}=24.1\mathrm{MPa}$ の応力負荷があるとき、平面応力、平面ひずみの各場合について、面内のひずみ成分（ε_x, ε_y, γ_{xy}），(ε_1, ε_2)とｚ方向の（σ_z, ε_z）を求めよ。（$E=190\mathrm{kN/mm^2}$, $\nu=0.30$）

解）平面応力：$\sigma_z=0$

$\varepsilon_x=(83.8-0.30\times51.0)\times10^{-3}/\ 190\ =3.61\times10^{-4}$

$\varepsilon_y=(51.0-0.30\times83.8)\times10^{-3}/\ 190\ =1.36\times10^{-4}$

$\varepsilon_z=\{0-0.30(83.8+51.0)\}\times10^{-3}/\ 190\ =-2.13\times10^{-4}$

$G=E/2(1+\nu)=76.0\mathrm{kN/mm^2}\ \rightarrow\ \gamma_{xy}=24.1\times10^{-3}/\ 76.0\ =3.17\times10^{-4}$

$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)=(2.49\pm1.94)\times10^{-4}$

平面ひずみ：$\varepsilon_z=0$ → $\sigma_z=0.30(83.8+51.0)=40.4\text{MPa}$

$\varepsilon_x=\{83.8-0.30(51.0+40.4)\}\times10^{-3}/190=2.97\times10^{-4}$

$\varepsilon_y=\{51.0-0.30(83.8+40.4)\}\times10^{-3}/190=0.723\times10^{-4}$

γ_{xy}の値は平面応力の場合と同じ

$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)=(1.85\pm1.94)\times10^{-4}$

問２）【演習 4.1】問３)において、①板厚方向ｚを自由にした状態（平面応力）と、②ｚ方向に拘束した状態（平面ひずみ）で $F_x=882\text{kN}$, $F_y=-588\text{kN}$(圧縮）を加えた場合の各辺長の変化量と体積変化量を求めよ。②ではｚ方向の拘束力も求めよ。（$E=26.3\text{kN/mm}^2$, $\nu=0.25$）

解）$\sigma_x=882/(250\times50)=0.0706\text{kN/mm}^2=70.6\text{N/mm}^2$

$\sigma_y=-588/(200\times50)=-0.0588\text{kN/mm}^2=-58.8\text{N/mm}^2$

①平面応力：$\sigma_z=0$

$\varepsilon_x=(70.6-0.25\times(-58.8))\times10^{-3}/26.3=3.24\times10^{-3}$ → $\Delta a=6.48\times10^{-2}\text{cm}$

$\varepsilon_y=(-58.8-0.25\times70.6)10^{-3}/26.3=-2.91\times10^{-3}$ → $\Delta b=-7.28\times10^{-2}\text{cm}$

$\varepsilon_z=\{0-0.25(70.6-58.8)\}10^{-3}/26.3=-0.112\times10^{-3}$ → $\Delta t=-0.56\times10^{-3}\text{cm}$

$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=0.218\times10^{-3}$ → $\Delta V=0.545\text{cm}^3$

②平面ひずみ：$\varepsilon_z=0$

→ $\sigma_z=0.25(70.6-58.8)=2.95\text{kN/mm}^2$, $F_z=\sigma_z\times(a\times b)=148\text{kN}$

$\varepsilon_x=\{70.6-0.25(-58.8+2.95)\}\times10^{-3}/26.3=3.22\times10^{-3}$ → $\Delta a=6.44\times10^{-2}\text{cm}$

$\varepsilon_y=\{-58.8-0.25(70.6+2.95)\}\times10^{-3}/26.3=-2.93\times10^{-3}$ → $\Delta b=-7.33\times10^{-2}\text{cm}$

$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y=0.290\times10^{-3}$ → $\Delta V=0.725\text{cm}^3$

問３）１辺の長さが 5cm の立方体の２方向に $\sigma=49.0\text{MPa}$ の圧縮応力を加えたとき、残りの１方向に伸び変形を生じさせない（平面ひずみ状態を保つ）ために加えるべき拘束力Ｆと２方向の収縮量を求めよ（E, ν は問１）と同じ)。

解）作用力の２方向をｙ，ｚとして、$\sigma_y=\sigma_z=-49.0\text{MPa}$

平面ひずみの条件（$\varepsilon_x=0$）より $\sigma_x=\nu(\sigma_y+\sigma_z)=-24.5\text{MPa}=-0.0245\text{kN/mm}^2$

$F_x=\sigma_x\times2500\text{mm}^2=-61.3\text{kN}$

$\varepsilon_y=\varepsilon_z=\{-49.0-0.30(-49.0-24.5)\}\times10^{-3}/190=-1.42\times10^{-4}$

$\Delta_y=\Delta_z=\varepsilon_y\times50=-7.10\times10^{-3}\text{mm}$

問４）剛性の大きい中空円筒の容器に材料を詰め、上から一様圧 $\sigma_1=p$ を加えて圧縮ひずみ ε_1 を計測し、弾性率：$E_c=\sigma_1/\varepsilon_1$ を求める。 このような側方拘束状態で求めた E_c を拘束弾性率と呼ぶ。しからば、側方拘束しない状態で求められる（通常の）材料自体の弾性率 E と E_c の間にはどのような関係にあるかを調べよ。

解）一軸方向の圧縮で側方拘束ということは、$\varepsilon_2=\varepsilon_3=0$，$\sigma_2=\sigma_3$ であり

$\varepsilon_2=\{\sigma_2-\nu(\sigma_1+\sigma_2)\}/E=0 \quad\rightarrow\quad \sigma_2=\nu/(1-\nu)\times\sigma_1=K_0\cdot\sigma_1$

したがって、圧縮方向のひずみは

$$\varepsilon_1=\{\sigma_1-\nu(2K_0\cdot\sigma_1)\}/E$$
$$=(1-2\nu K_0)\times\sigma_1/E$$
$$=(1-\nu-2\nu^2)/(1-\nu)\times\sigma_1/E$$

よって、拘束状態の弾性率は

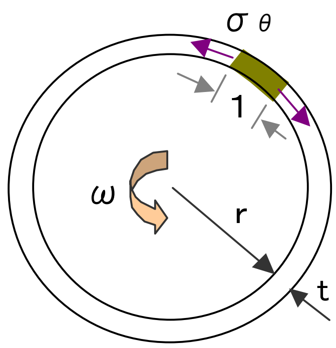
$$E_c=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}=\frac{(1-\nu)E}{1-\nu-2\nu^2}$$

極座標に関する問題（教科書 p.4.8 末尾）

※平均半径ｒ，厚さｔの薄肉リングがその中心軸回りに角速度ωで回転しているとき、円周応力が $\sigma_\theta=\gamma r^2\omega^2/g$ で与えられることを示せ（γ：単位体積重量、ｇ：重力加速度）。

解）円周に沿って単位長さの要素（質量ｍ＝ρｔ×１）を考えると、作用する遠心力はｆ＝ｍｒω^2 であり、これを作用幅１で除せば上例の内圧ｐに対応する。すなわち

$$p=f/1=mr\omega^2/1=\rho t r\omega^2=(\gamma/g)tr\omega^2$$
$$\rightarrow\quad \sigma_\theta=pr/t=\gamma r^2\omega^2/g$$



※半径ｒ，肉厚ｔ（＜＜ｒ）の薄肉球殻が内圧ｐを受けるときの円周応力が $\sigma_\theta=pr/2t$ で与えられることを示せ。

解）ｄθ部分に作用する内圧による力を、その円周上で積分して断面力とのつり合いを考える。 ハッチ部分の円周が $2\pi(r\cos\theta)$ に相当するから

$$\sigma_\theta\cdot 2\pi rt=\int 2\pi(r\cos\theta)\cdot p(rd\theta)\sin\theta$$
$$=2\pi r^2p\int\cos\theta\sin\theta\, d\theta$$
$$=\pi pr^2$$
$$\rightarrow\quad \sigma_\theta=pr/2t$$