第３章　演習問題及び解答

【演習３.１】変形＝ひずみの積分

問１）長方形柱の水平方向に一様な加速度αが作用するとき、①水平面に働くせん断応力のy方向の分布を描け。②柱頂部の水平方向の相対変位δを求めよ。柱材料の密度ρ、剛性率Gとする。

解）基盤から上にy座標をとると、y面より上の質量に働く慣性力Fは

$$F = M\alpha = \rho a(h-y)\alpha$$

したがって、y面に働くせん断応力$\tau(y)$と発生するせん断ひずみ$\gamma(y)$は

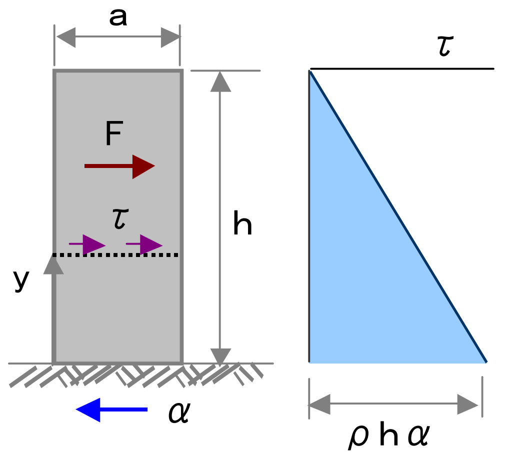
$$\tau(y) = F/a = \rho(h-y)\alpha$$

$$\rightarrow \quad \gamma(y) = \rho(h-y)\alpha/G$$

このひずみを $0\sim h$ で積分して、相対変位δは

$$\delta = \int \gamma(y)dy = (\rho\alpha/G)\int(h-y)dy$$

$$= \rho\alpha h^2/(2G)$$



問２）図の直径が漸変する円錐棒を軸方向に引張ったときの伸び量ΔL を求めよ。また平均直径$d=(d_0+d_1)/2=2.5d_0$の棒が同じ荷重Pを受けた時の伸び量$\Delta L'$を求めて比較せよ。

解）左端からxを測ると

$$d(x) = d_0(1+3x/L)$$

$$\varepsilon(x) = \sigma(x)/E = 4P/\pi E d(x)^2$$

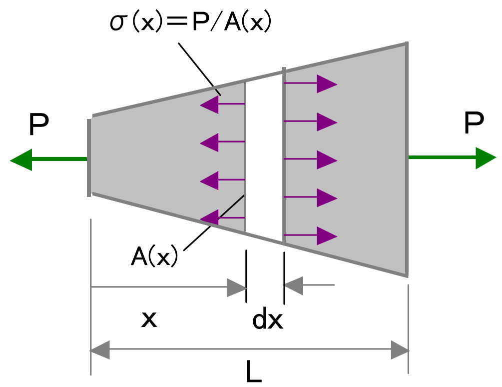
このひずみを $0\sim L$ で積分して

$$\Delta L = \int \varepsilon(x)dx = PL/(\pi E d_0^2)$$

一様断面のとき

$$\Delta L' = 4PL/\pi E(2.5d_0)^2$$

$$= 0.640\Delta L$$



問３）図の三角形断面の盛土を、①円錐形の山と考えた場合、②無限に続く堤防と考えた場合、について自重による沈下量を求めよ。（ヤング率E、単位体積重量γ）

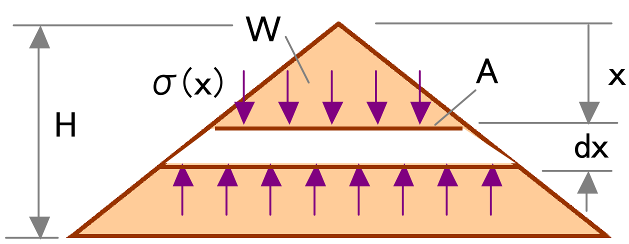
解）頂点からxを測り、x位置までの三角形状の重さWを面積Aで除すと、x位置の平均的な圧縮応力$\sigma(x)$を得る。沈下量$=\int \sigma(x)/E \cdot dx$ で求まる。

① $W = Ax\gamma/3, \quad \sigma(x) = \gamma x/3$

$$\rightarrow \quad \Delta = \gamma H^2/6E$$

② $W = Ax\gamma/2, \quad \sigma(x) = \gamma x/2$

$$\rightarrow \quad \Delta = \gamma H^2/4E$$



問４）単位体積重量γと弾性率Eが異なる二層地盤の自重による沈下量を求めよ。

解）各層の表面から深さz_1，z_2を測ると

１層目：$\sigma_1(z_1)=\gamma_1 z_1$

収縮量：$\Delta_1=\int \sigma_1(z_1)dz_1/E_1$

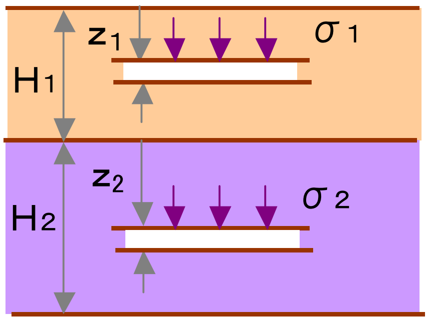
$=\gamma_1 H_1^2/2E_1$

２層目：$\sigma_2(z_2)=\gamma_1 H_1+\gamma_2 z_2$

収縮量：$\Delta_2=\int \sigma_2(z_2)dz_2/E_2$

$=\gamma_1 H_1 H_2/E_2+\gamma_2 H_2^2/2E_2$

沈下量は両収縮量の和になる。



問５）表面荷重qの作用によって地盤内に伝達される鉛直応力σ_zは、深さzの増加に伴って指数関数的に減少する。そこで、荷重の中心線上でのσ_zの分布が

$\sigma_z=a\cdot\exp(-b\cdot z)$　　ただし、$z=0$　で　$\sigma_z=q$

$z=4B$　で　$\sigma_z=0.1\times q$

で与えられるとき、$z=0\sim4B$ の範囲の土層の圧縮によって生じる地表面沈下量を求めよ。また、表面荷重qが半無限に広がるときの沈下量を求め、前者との比を調べよ。ただし、地盤のEは一定とする。

解）σ_z の分布形の条件を入れると

$z=0 \quad \rightarrow \quad a=q$

$z=4B \quad \rightarrow \quad q\cdot\exp(-4bB)=0.1q$

$\exp(4bB)=10 \quad \rightarrow \quad b=0.576/B$

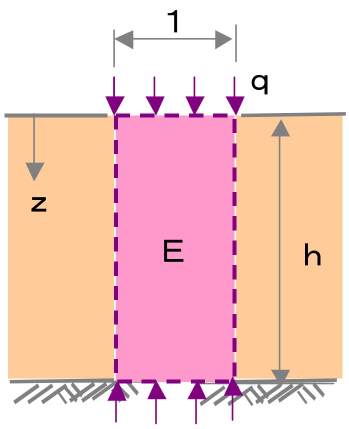
となる。ひずみ　$\varepsilon_z=\sigma_z/E$　をzに関して　$0\sim4B$　で積分して

$s=\int\sigma_z\, dz/E=1.56qB/E$

また、表面荷重が半無限に広がるときの沈下量は

$s'=4qB/E \quad \rightarrow \quad s/s'=0.39$

※前問とこの問題のように、横幅が不明確な物体の伸縮変形を計算する場合は、単位幅の棒の伸縮問題として考えればよい。右図の場合は、変形量$\Delta h=\varepsilon\cdot h=(q/E)\cdot h=qh/E$



【演習３.２】座標ひずみの変換／体積ひずみ

問１）図－3.8 のxy座標系で、ある点の変位が U(10, 6) で与えられるとき、xy座標と$\alpha=20°$傾斜する$x'y'$座標系の変位成分 $U(u', v')$ を座標変換を用いて求めよ。

解）方向余弦：$x'=(0.940,\ 0.342)$，$y'=(-0.342,\ 0.940)$

$U\cdot x'=(10,\ 6)(0.940,\ 0.342)=11.5$

$U\cdot y'=(10,\ 6)(-0.342,\ 0.940)=2.22$

問２）式(3.7)の　$\varepsilon_{y'}$，$\gamma_{x'y'}$　を誘導せよ。また、下式から同じ表示が得られることを確かめよ。

解）解答は本文中にあるので、省略する。自分で誘導を確かめることが大事。

問３）１辺の長さが 50cm の立方体を圧力室に入れて圧力を負荷したところ、各辺が４mm縮んだ。垂直ひずみの和として求められる体積ひずみｅと体積変化量⊿Ｖを求めよ。

解）初期体積は $V_0 = 50^3 = 1.25\times10^5\mathrm{cm}^3$、辺長の変化は $\varepsilon = -0.4/50 = -8\times10^{-3}$ 、よって
$e = 3\varepsilon = -2.40\times10^{-2}$, $V = eV_0 = -3000\mathrm{cm}^3$ となる。
（全て圧縮・収縮であるから負符号をつける必要はないが、予め断り書きが必要）
なお、変形後の辺長が 50－0.4＝49.6cm であるから、$V = (49.6)^3 = 1.22024\times10^5\mathrm{cm}^3$ より
$e = (V - V_0)/V_0 = -2.38\times10^{-2}$ で、上のｅと大差ない。したがって、体積ひずみｅは垂直ひずみの和で計算した方がよい。（計算が簡単で間違いが少ない）

問４）辺長ａ＝20cm, ｂ＝30cm の長方形断面を有する長さ L＝2.50m の柱の長手方向に圧縮力を作用させたとき、⊿L＝－6.50mm（収縮）の変形が生じた。 ν＝0.25として、２つの辺長変化量⊿ａ，⊿ｂと体積ひずみｅ及び体積変化量⊿Ｖを求めよ。

解） $\varepsilon_L = -6.50/2500 = -2.60\times10^{-3}$, $\varepsilon_d = -\nu\,\varepsilon_L = 0.650\times10^{-3}$
$\rightarrow$ $\Delta a = a\times\varepsilon_d = 0.0130\mathrm{cm}$, $\Delta b = b\times\varepsilon_d = 0.0195\mathrm{cm}$
$e = \varepsilon_L + 2\varepsilon_d = -1.30\times10^{-3}$ $\rightarrow$ $\Delta V = eV_0 = -195\mathrm{cm}^3$

問５）長さL の片持ち梁が放物線形（$v = ax^2$）に変形し、先端のたわみ量がv_0 であったとする。①ａの値を定めて、たわみ量ｖの式を図の記号を用いて表せ。②ｘ位置のたわみ勾配$\tan\theta$ の式を表示し、梁の中央（$x = L/2$）と先端（$x = L$）における $\tan\theta$ 値の比率を求めよ。③ｘ位置の微小区間⊿ｘ内に生じるたわみ増加量を⊿ｖ とすると $\Delta v = \Delta x\cdot\tan\theta$ であり、これを全区間 $x = 0\sim L$ にわたって加え合わせた（積分した）ものが先端のたわみ量v_0 になることを確かめよ。

解）① $x = L$ で $v = v_0$ より $a = v_0/L^2$
$\rightarrow$ $v = (v_0/L^2)x^2 = v_0(x/L)^2 = v_0\cdot\eta^2$ （$\eta = x/L$）
② $\tan\theta = dv/dx = 2v_0x/L^2 = 2v_0\eta/L$
$\rightarrow$ $x = L/2$（$\eta = 1/2$）で $\tan\theta = v_0/L$
$x = L$（$\eta = 1$）で $\tan\theta = 2v_0/L$ ← 比率は2倍
③ $\Delta v = \Delta x\cdot\tan\theta = 2v_0x/L^2\times dx$
$v = \Sigma\Delta v = \int 2v_0x/L^2\times dx = (2v_0/L^2)\int x\,dx = (2v_0/L^2)\times(L^2/2) = v_0$
$= \int 2v_0\eta/L\times(d\eta\cdot L) = (2v_0)\times\int\eta\,d\eta = (2v_0)\times1/2 = v_0$