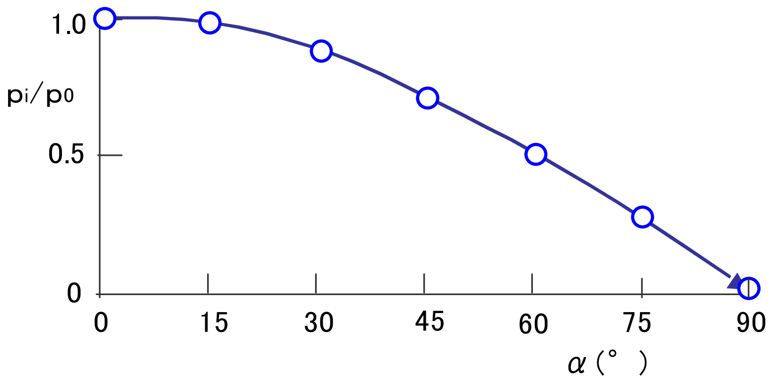
第２章　演習問題及び解答

【演習２.１】応力の分解

問１）図－2.2 で、任意面上の応力 p_i と面の傾角 α_i の関係を図示せよ。

解）$p_i = F/(A_0/\cos\alpha_i) = (F/A_0)\cos\alpha_i = p_0 \cdot \cos\alpha_i$



問２）図－2.3 から（p_x, p_y）と（σ, τ）の関係を断面傾角 α を用いて示せ。

解）求めたい応力成分への射影を加算すればよい。

$$p_x = \sigma\cos\alpha + \tau\sin\alpha \qquad \sigma = p_x \cdot \cos\alpha + p_y \cdot \sin\alpha$$
$$p_y = \sigma\sin\alpha - \tau\cos\alpha \qquad \tau = p_x \cdot \sin\alpha - p_y \cdot \cos\alpha$$

【演習２.２】応力のつり合い

問１）３次元応力状態における応力のつり合い方程式を導け。

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$
$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

問２）下図の場合について直角座標応力成分（σ_x, σ_y, τ_{xy}）を表せ。また、(ｃ)図については応力つり合い式が満たされることを確かめよ。

解）
(a) $\sigma_x = F/A = 5\text{kN/cm}^2 = 0.05\text{kN/mm}^2 = 50\text{MPa}$,　$\sigma_y = 0$,　$\tau_{xy} = 0$
(b) $\sigma_x = 0$,　$\sigma_y = -2\text{kN/cm}^2 = -20\text{MPa}$,　$\tau_{xy} = 0$
(c) $\sigma_x = -My/I$（ｙに伴って直線的に変化する曲げ応力），　$\sigma_y = 0$,　$\tau_{xy} = 0$

【演習２.３】任意面上の応力

問１）式(2.11)を、図―2.10の微小三角形ＯＢＣに働く力のつり合い関係から誘導せよ。

解）水平・鉛直方向のつり合い式

$x：\sigma\Delta s\cdot\cos\alpha-\tau\Delta s\cdot\sin\alpha=\sigma_x\Delta y+\tau_{xy}\Delta x$

$y：\sigma\Delta s\cdot\sin\alpha+\tau\Delta s\cdot\cos\alpha=\sigma_y\Delta x+\tau_{xy}\Delta y$

左右辺をΔsで除し、$\Delta x/\Delta s=\sin\alpha$，$\Delta y/\Delta s=\cos\alpha$　の関係を用いると

$x：\sigma\cos\alpha-\tau\sin\alpha=\sigma_x\cos\alpha+\tau_{xy}\sin\alpha$　①

$y：\sigma\sin\alpha+\tau\cos\alpha=\sigma_y\sin\alpha+\tau_{xy}\cos\alpha$　②

次の演算を行い、倍角の公式を用いると、式(2.11)を得る。

①×$\cos\alpha$＋②×$\sin\alpha$　→　$\sigma=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha+2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$

②×$\cos\alpha$－①×$\sin\alpha$　→　$\tau=-(\sigma_x-\sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha+\tau_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

問２）図―2.10(ａ)と鉛直対称の左下がりの断面に作用する応力（σ，τ）と（$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$）の関係を誘導せよ。

解）図のように鉛直から測った角度をαとし、$x'y'$座標を設定すると、まず両座標軸のxy座標に対する方向余弦　$x'(l_1, m_1)$，$y'(l_2, m_2)$　は

$x'：l_1=\sin\alpha$，$m_1=\cos\alpha$　　$y'：l_2=-\cos\alpha$，$m_2=\sin\alpha$

また、任意面BC上の応力のxy座標成分$p(p_x, p_y)$は、微小三角形のつり合いより

$x：p_x\Delta s+\sigma_x\Delta y-\tau_{xy}\Delta x=0$　→　$p_x=-\sigma_x\cos\alpha+\tau_{xy}\sin\alpha$

$y：p_y\Delta s-\sigma_y\Delta x-\tau_{xy}\Delta y=0$　→　$p_y=\sigma_y\sin\alpha-\tau_{xy}\cos\alpha$

したがって、$x'y'$座標方向の成分は、方向余弦とpの内積から求められ

$\sigma=\sigma_y'=(p_x, p_y)(l_2, m_2)=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha-2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$

$\tau=\tau_{xy}'=(p_x, p_y)(l_1, m_1)=-(\sigma_x-\sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha-\tau_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

となって、式(2.11)で　τ_{xy}　を　$-\tau_{xy}$　に置き換えた形になる。

【演習２.４】応力の主方向

問１）式(2.15)の主面の方向α_n は式(2.11)の第２式で　$\tau=0$　として求められる。また、このα_nを式(2.11)の第１式に直接代入すれば、式(2.14)の主応力が定まる。これを誘導せよ。

解）式(2.11)で　$\tau=0$　とすると　$\tan2\alpha_n=2\tau_{xy}/(\sigma_x-\sigma_y)$　となる。　この関係式は比例定数Ｋに対して次の２式の比で表せる。（$\tan2\alpha_n=\sin2\alpha_n/\cos2\alpha_n$　を考慮）

$2\tau_{xy}=K\sin2\alpha_n$　　$(\sigma_x-\sigma_y)=K\cos2\alpha_n$

逆に、上２式からＫ値は　$K=\pm\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2\right]^{1/2}$　と得られ、これを式(2.11)の第１式に代入すると主応力の式が容易に誘導できる。

問２）水平地盤内の深さｚにおける応力状態は、$\sigma_z=\gamma z$，$\sigma_x=\sigma_y=K\sigma_z$（$\gamma$：土の単位体積重量，Ｋ：土圧係数）で与えられる。　しからば、水平と$\theta=30°$及び 45°傾斜する面に作用する（σ,τ）はいくらか、$\gamma=20$kN/m³，$z=15$m，$K=0.5$　として計算せよ。

解）全て圧縮応力であるから、図-2.10と逆方向の矢印(圧縮)を正とすれば式(2.11)がそのまま使える。

鉛直にｚ軸、水平にｘｙ軸をとると

$\sigma_x(=\sigma_y)=K\gamma z$，　$\sigma_z=\gamma z$，　$\tau_{xz}=0$

式(2.11)に σ_x と σ_z（σ_yに対応）を入れると

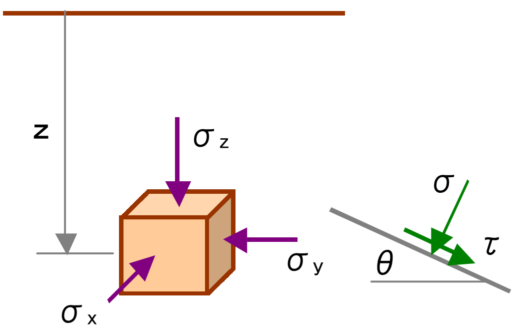
$\sigma=(K+1)(\gamma z/2)+(K-1)(\gamma z/2)\cos 2\alpha$

$\tau=-(K-1)(\gamma z/2)\sin 2\alpha$

式(2.11)の α と右図の θ は α＝90°－θ　であり

$\gamma z/2=20\mathrm{kN/m^3}\times 15\mathrm{m}/2=150\mathrm{kN/m^2}=150\mathrm{kPa}$

から（σ，τ）を計算すると、K＝0.5 のとき



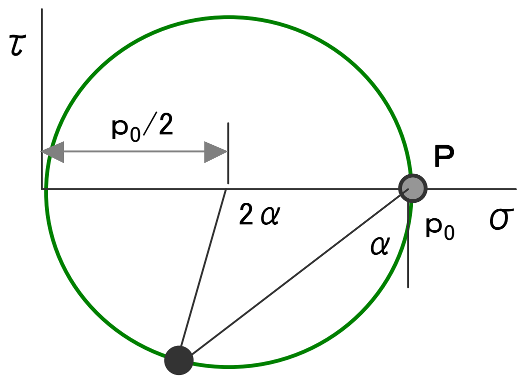
θ＝30° → α＝60°（cos2α＝－0.5，sin2α＝0.866）　→　σ＝263kPa　τ＝65.0kPa

θ＝45° → α＝45°（cos2α＝0.0，sin2α＝1.0）　→　σ＝225kPa　τ＝75.0kPa

問３）数値解答は教科書、応力の作用方向等の図は【演習２．５】問２）を参照。

【演習２.５】モール円／極

問１）単純引張における任意面上の応力は、式(2.2)および図－2.4に示したが、面の傾角を　α＝0～90°の範囲で変化させたとき、(σ,τ)の応力点がモール円上でどのように動くかを調べよ。



解）モール円は右のようになり、極は右端点。

α＝0～90°の変化に対し応力点は極Ｐから円の下側を左方向に進み原点に至る.。

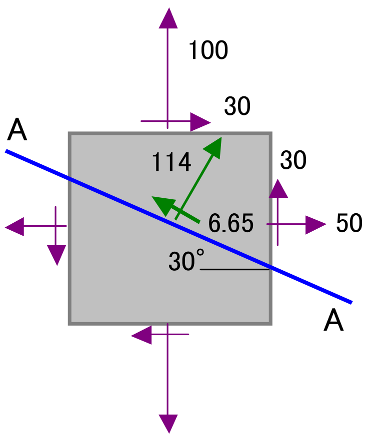
α＝0° →　σ＝p_0，　τ＝0

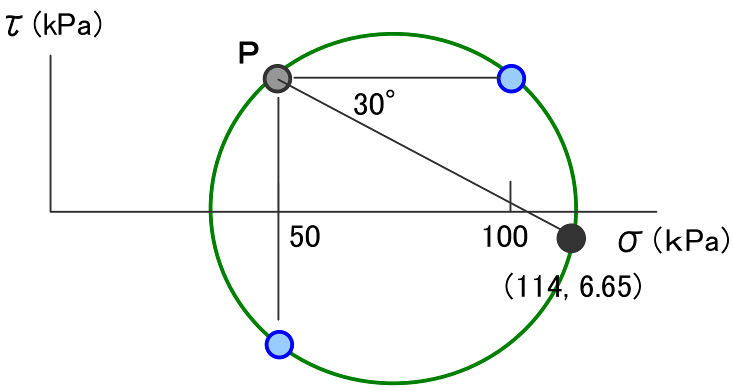
α＝45°→　σ＝$p_0/2$，　τ＝$p_0/2$（反時計回り）

α＝90°→　σ＝0，　τ＝0

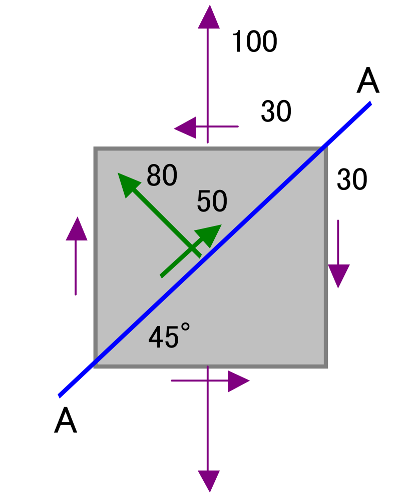
問２）【演習２．４】問３）の各場合についてモール円を描きＡＡ面上の応力を図式的に求めよ。

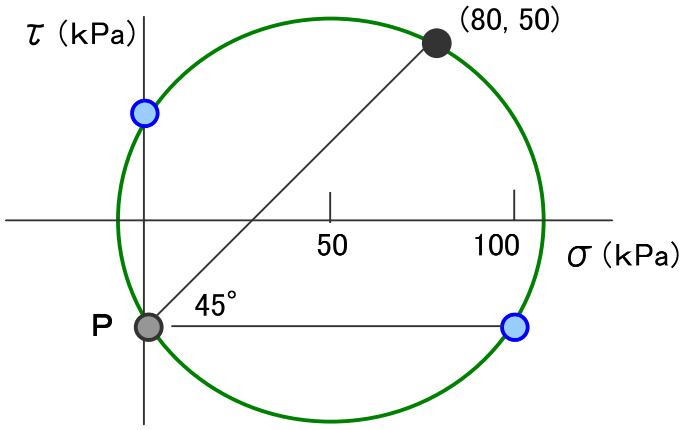
（１）σ＝113.5kPa，　τ＝6.65kPa（反時計），　σ_1＝114kPa，　σ_2＝35.9kPa，　τ_{max}＝±39.1kPa



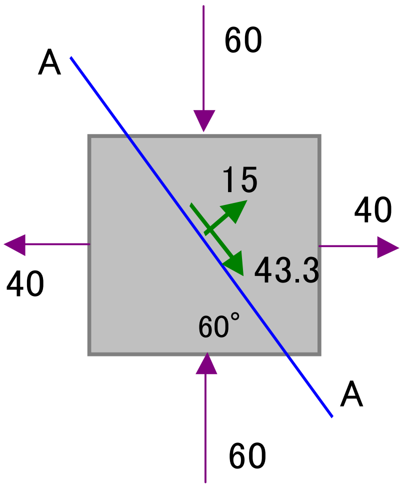


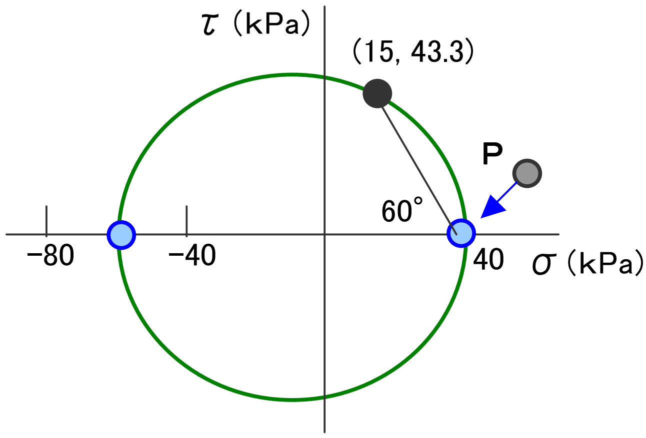
（2） $\sigma=80$kPa， $\tau=50$kPa（時計）， $\sigma_1=108$kPa， $\sigma_2=-8.30$kPa， $\tau_{max}=\pm58.3$kPa



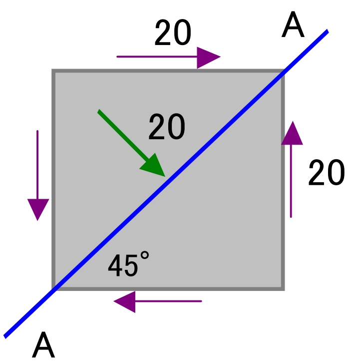


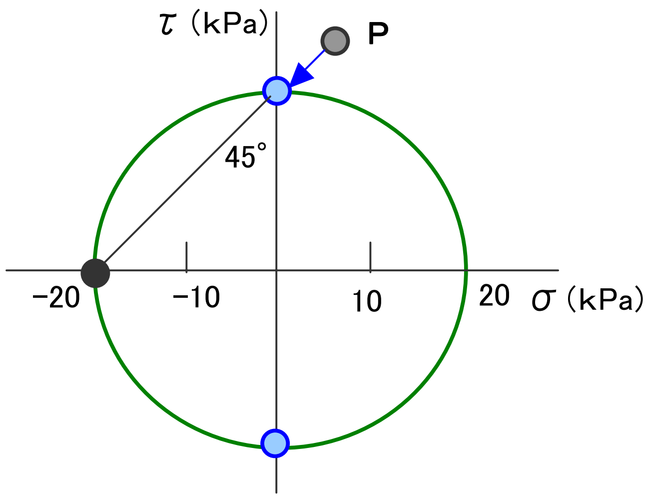
（3） $\sigma=15.0$kPa， $\tau=-43.3$kPa（時計）





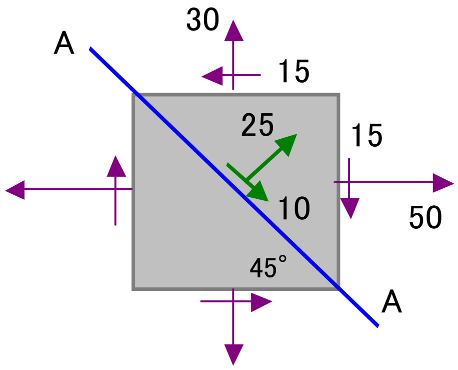
（4） $\sigma=-20$kPa， $\tau=0$， $\sigma_1=20$kPa， $\sigma_2=-20$kPa

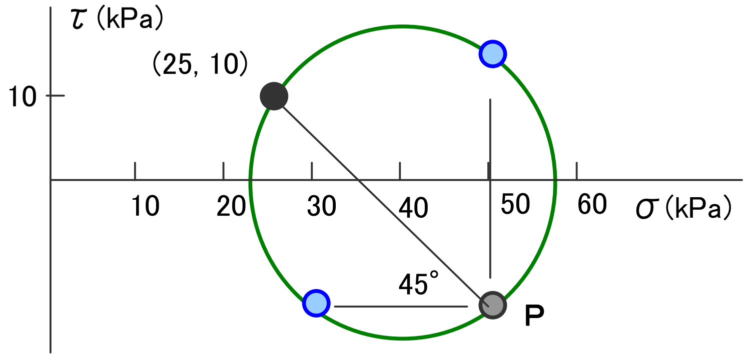




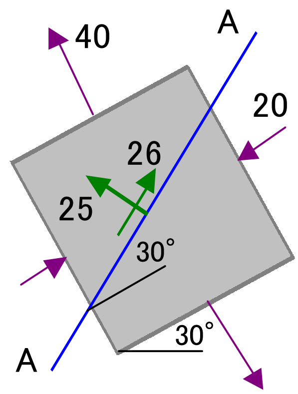
問３）次の場合についてＡＡ面上の（σ，τ）を計算とモール円を用いて求め、図中にそれらの作用方向を記せ。また、主応力と最大せん断応力の値や作用方向を調べよ。

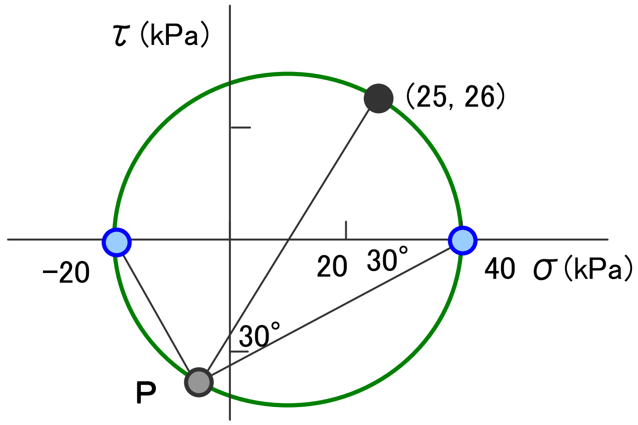
（a）σ=25ｋPa，τ＝－10kPa（時計)，（σ_1，σ_2）=(58.0，22.0)kPa，τ_{max}＝18.0kPa



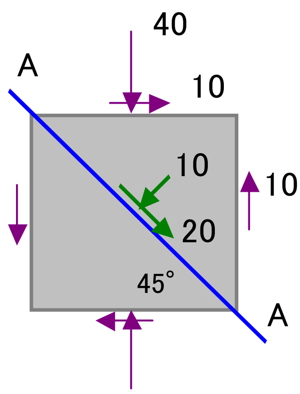


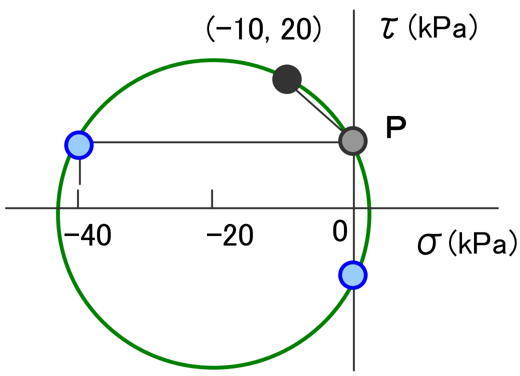
（b）σ=25ｋPa，τ＝－26.0ｋPa（時計），（σ_1，σ_2）=(40.0，－20.0)kPa，τ_{max}＝30.0kPa



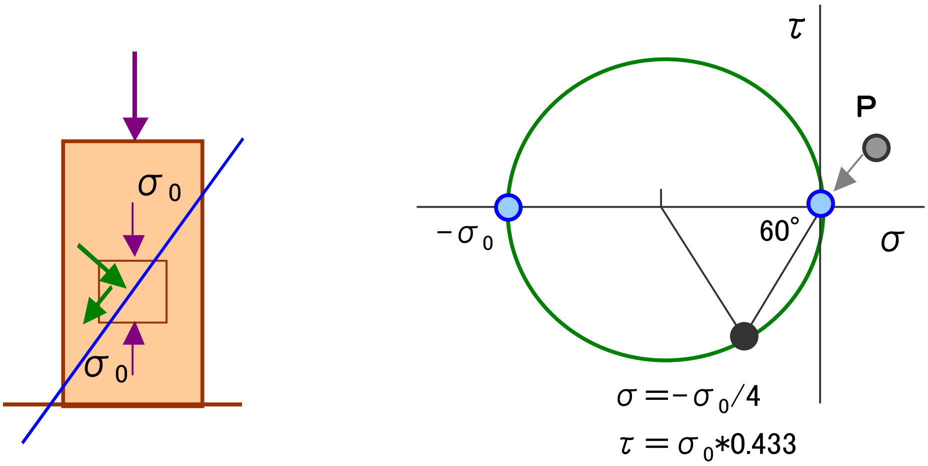


（c）σ=－10ｋPa，τ＝－20kPa（時計），（σ_1，σ_2）=(42.4，2.4)kPa，τ_{max}＝22.4kPa



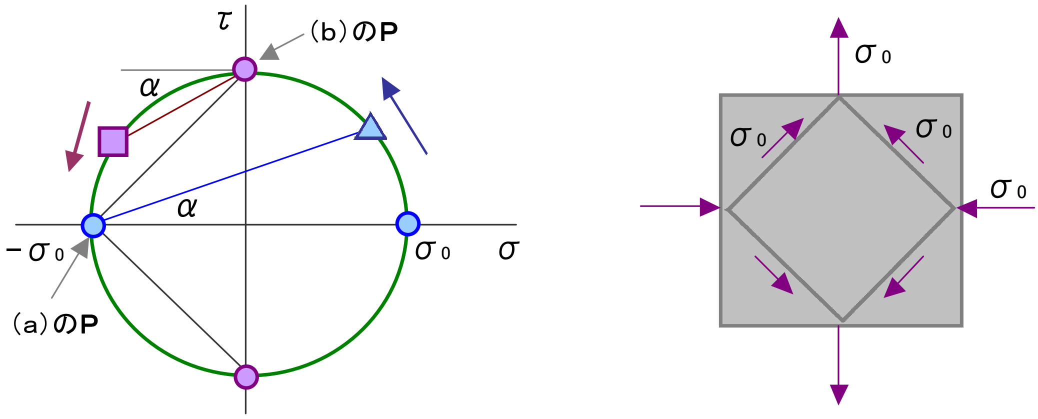


（ｄ）断面積＝0.0177m^2, 軸圧縮応力σ_0＝－320kN/0.0177m^2＝－18.1MPa、以下σ_0の倍数で表す。
$\sigma=0.25\sigma_0$,　$\tau=0.866\sigma_0$（反時計），（σ_1,　σ_2）=(0.0,　1.0)　σ_0,　$\tau_{max}=0.5\sigma_0$



問４）図の２つの応力状態において、α＝0～90°で変化させたときのα面上の（σ,τ）とαの関係を図示し、応力状態の特性を比較せよ（単純せん断と純粋せん断）。

解）(a)(b)のモール円は大きさ、位置とも一致するが、極の位置は異なる。両者とも水平から反時計回りにα＝0～90°を測って面上の（σ,τ）を求めると、(a)の場合は応力点が点(σ_0,　0)から反時計回りに動き、α＝90°で点(－σ_0,　0)に至る。(b)の場合も点(0,　σ_0)から点(0,　－σ_0)まで反時計回りに応力点が動くが、これは(a)の場合より丁度45°位相がずれて応力点が動いていることに相当する。すなわち、(a)の応力状態の45°面上の応力状態が(b)に対応する。



α面上の（σ,τ）を式表示すると以下のようになり、45°の位相差が現れる。

(a)の場合

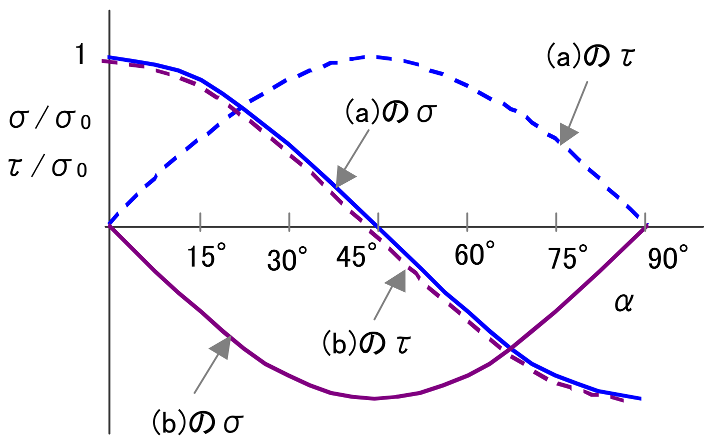
$\sigma=\sigma_0\cdot\cos2\alpha$

$\tau=\sigma_0\cdot\sin2\alpha$

(b)の場合

$\sigma=-\sigma_0\cdot\sin2\alpha=\sigma_0\cdot\cos2(\alpha+45°)$

$\tau=\sigma_0\cdot\cos2\alpha=\sigma_0\cdot\sin2(\alpha+45°)$



問５）【演習２．４】問２）で述べた水平地盤内の応力状態をモール円で表し、水平とα傾斜する面上の応力点（σ, τ）を示せ。

解）ここでは引張り正の約束に従うと、$\sigma_1 = -K_0\gamma z$(水平応力σ_x), $\sigma_2 = -\gamma z$(鉛直応力σ_z)であり、モール円は右図のように描ける。α面上の応力（σ, τ）は式(2.20)を用いて

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 + (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \cdot \cos 2\alpha = -(K_0+1)(\gamma z/2) - (K_0-1)(\gamma z/2)\cos 2\alpha$$

$$\tau = -(\sigma_1 - \sigma_2)/2 \cdot \sin 2\alpha = (K_0-1)(\gamma z/2)\sin 2\alpha$$