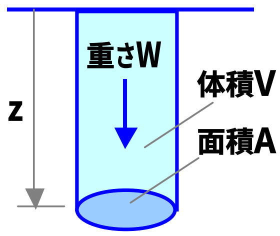
第１章　演習問題及び解答

【演習１.１】荷重と単位／力のつり合い／応力・ひずみ

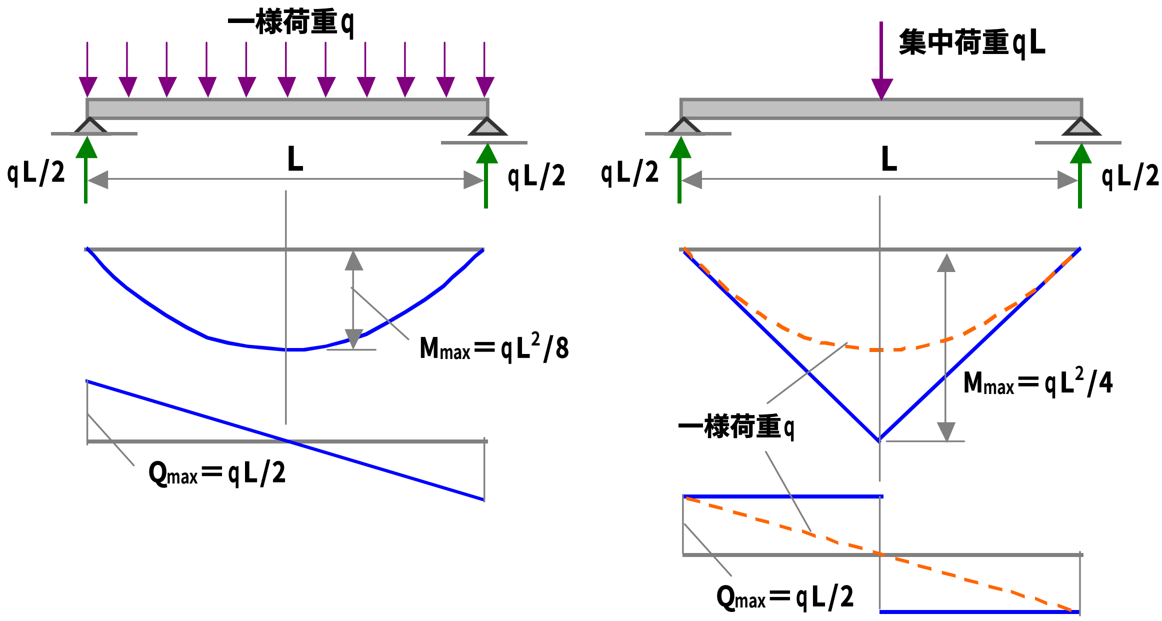
問１）水中の深さｚで手に感じる圧力ｐ（水圧）を式で表せ。（水の密度を ρ_w と置く）
具体的に、ｚ＝150mのｐ値を重力単位とＳＩ単位で求めよ。

解）底面積Ａで深さｚの筒状の水柱（体積Ｖ＝Ａｚ）を考えると、
水の単位体積重量は $\gamma_w = \rho_w g$（ｇ：重力加速度）であるから
水柱質量 $M = \rho_w V$、水柱重量 $W = Mg = \rho_w g V = \gamma_w (Az)$
→　水圧＝単位面積あたりの力：$p = W/A = \gamma_w z$
水の密度：$\rho_w = 1\ \mathrm{g/cm^3} = 1\ \mathrm{t/m^3}$
重力単位：$\gamma_w = 1\ \mathrm{tf/m^3}$、$p = 1\ \mathrm{tf/m^3} \times 150\mathrm{m} = 150\mathrm{tf/m^2} = 15\mathrm{kgf/cm^2}$
ＳＩ単位：$\gamma_w = 9.8\mathrm{kN/m^3}$、$p = 9.8\mathrm{kN/m^3} \times 150\mathrm{m} = 1470\mathrm{kN/m^2} = 1470\mathrm{kPa} = 1.47\mathrm{Mpa}$

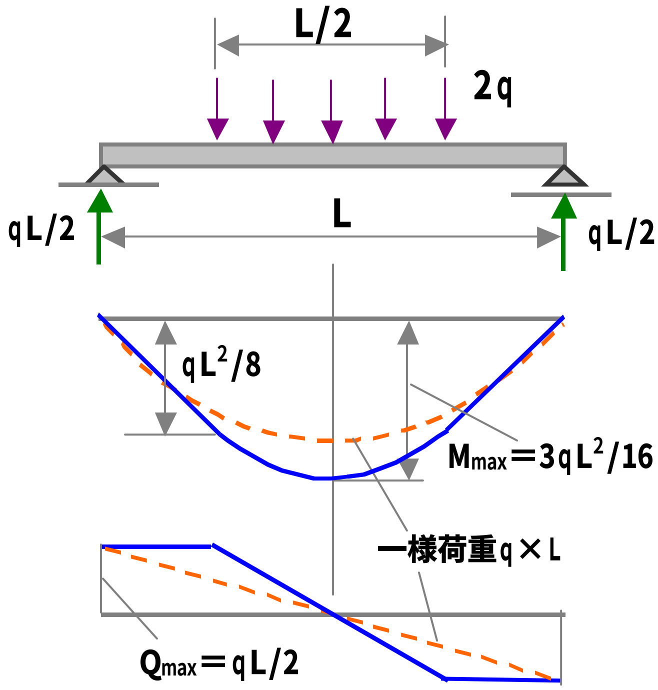


問２）幅ｂ＝30cm、高さａ＝10cmの矩形断面で、長さＬ＝120cmの単純梁がある。
①梁の表面を高さｈ＝20cmの壁で囲んで水を満たしたとき、この水荷重を面荷重ｐとみなす場合と、構造計算で使う線荷重ｑとみなす場合のｐ，ｑ値を求めよ。
②上の線荷重ｑによるＭ図・Ｑ図と、同じ線荷重を梁中央に作用する集中荷重Ｐ(＝ｑ×L)に置換した場合のＭ図・Ｑ図を描き、分布形を比較せよ。

解）①上問より、$p = \gamma_w h = 9.8\mathrm{kN/m^3} \times 0.2\mathrm{m} = 1.96\mathrm{kN/m^2} = 1.96\mathrm{kPa}$
$q = p \times b = 1.96\mathrm{kN/m^2} \times 0.3\mathrm{m} = 0.588\mathrm{kN/m}$
②Ｍ図・Ｑ図の誘導については構造力学の教科書を参照されたい。一様荷重ｑのＭは、支持点からｘ位置で $M = qx(L-x)/2$ の放物線になり、最大値は $M_{max} = qL^2/8$ である。Ｑ図は $Q = q(L-2x)/2$ の直線分布であり、最大値は $Q_{max} = qL/2$ である。この一様荷重を梁中央に作用する集中力 $P = qL$ に置換すると、Ｍ図・Ｑ図は右図のようになり、Ｍについては最大値が $M_{max} = qL^2/4$ で、一様荷重の２倍の値が集中することになる。



補足：梁中央の半区間に上と全荷重値ｑＬが等しい一様荷重(2ｑ×L/2)の載荷を考えると、M図・Q図は右のようになる。荷重を中央に集めた分だけMが集中し、M_{max}値は一様荷重(ｑ×L)解の1.5倍になるが、梁中央に集中力(Ｐ＝ｑL) を載荷した場合に比べればMの集中は小さい。 Q図も一様荷重(ｑ×L)の解と集中力載荷の解の中間的な分布になる。全荷重値ｑＬを同じにして載荷幅を更に狭めていくと、その解は集中力載荷の解に徐々に近づいていく。 つまり、集中力は非常に狭い幅に作用する分布力と等価であり、実際の力の作用形態にも近い。なお、分布荷重を等価な集中力に置換して問題を解くことの是非は問題の性格による。

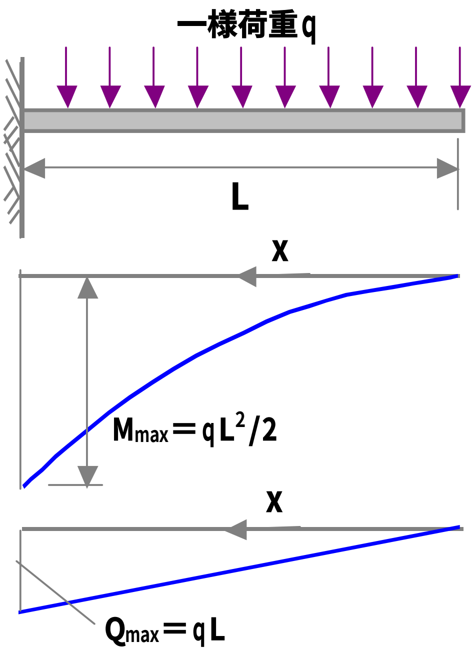


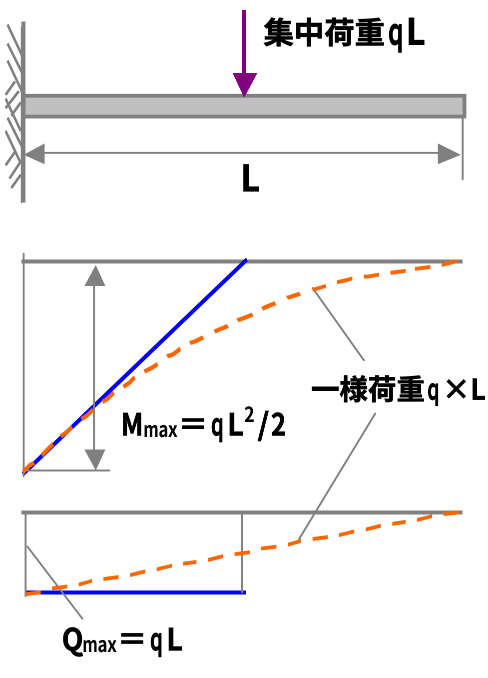
問３）上と同じ寸法の片持ち梁があるとして、梁の自重を荷重と見なしてM図・Q図を求めよ。また、自重を梁中央に作用する集中力に置き換えた場合のM図・Q図を求めて比較せよ。梁材料の密度は$\rho=1.2\mathrm{g/cm^3}$とする。

解）自重と等価な面荷重はｐ＝γａ＝(ρｇ)ａであるから、対応する線荷重ｑは

$$q=pb=(\rho g)ab=(1.2\times9.8)\mathrm{kN/m^3}\times0.1\mathrm{m}\times0.3\mathrm{m}=0.353\mathrm{kN/m}\qquad(\rho=1.2\ \mathrm{t/m^3})$$

一様荷重ｑの場合は梁先端からｘ位置で $M=qx^2/2$（放物線／固定端で$M_{max}=qL^2/2$）、$Q=qx$（直線／固定端で$Q_{max}=qL$）になる。一様荷重ｑを梁中央に作用する集中力$P=qL$に置換するとM図・Q図は右図のようになり、各最大値は一様荷重ｑの場合に一致する。つまり、この問題では、最大値に着目する限り分布荷重を集中荷重に置き換えてよい。





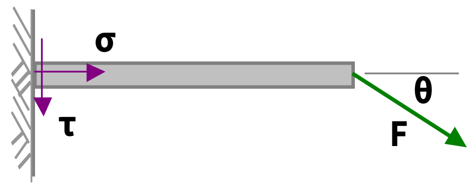
問４）上と同じ片持ち梁の先端に集中荷重Ｆ＝50kNを水平より下方θ＝30°方向に作用させるとき、梁の埋め込み部に作用する垂直応力σとせん断応力τの値を求めよ。

解）$N=F\cos\theta=50\cos 30°=43.3\text{kN}$

$\sigma=N/A=43.3/(0.1\times0.3)=1440\text{kN/m}^2$
$=1440\text{kPa}=1.44\text{MPa}$

$T=F\sin\theta=50\sin 30°=25.0\text{kN}$

$\tau=T/A=25.0/(0.1\times0.3)=833\text{kN/m}^2$
$=833\text{kPa}=0.833\text{MPa}$



※数値は３桁で打ち切り表示した

問５）体重Ｍ＝200kgの力士が10cm×25cmの足で踏んだ場合と、体重Ｍ＝40kgの女性が直径1cmの円形カカトで踏んだ場合とで圧力比較を行え。

解）力士：$W=200\times9.8\text{N}=1960\text{N}$ → $p=1960/(0.1\times0.25)=78.4\text{kN/m}^2=78.4\text{kPa}$

（または、$p=200\text{kgf}/(10\times25)=0.8\text{kgf/cm}^2=78.4\text{kPa}$）

女性：$W=40\times9.8\text{N}=392\text{N}$ → $p=392/(\pi/4\times0.01^2)=499\times10^4\text{N/m}^2=4990\text{kPa}=4.99\text{MPa}$

（または、$p=40\text{kgf}/(\pi/4\times1\times1)=50.9\text{kgf/cm}^2=4990\text{kPa}$）

問６）単純支持の構造物に図のような外力が作用するとき、①力及びモーメントのつり合い条件式を列挙せよ。②条件式を解いて点Ａ，Ｂの支点反力を求めよ。③反力を含め各点に作用する力のベクトルを作図して力の多角形が閉じることを確かめよ。

解）反力Rbは水平分力R_{bH}と鉛直分力R_{bV}に分ける。

＊つり合い式を立てて反力を計算する

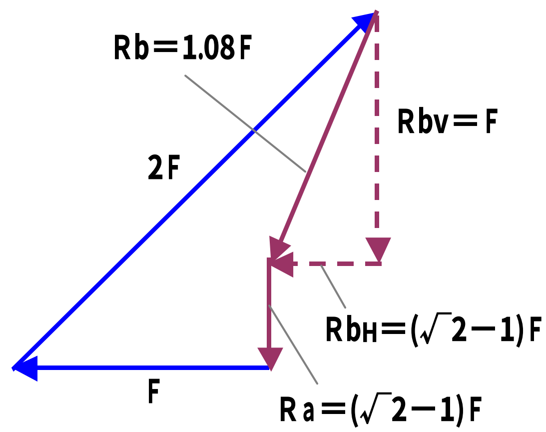
$\Sigma H=0$ → $\sqrt{2}F-F-R_{bH}=0$
〜 $R_{bH}=(\sqrt{2}-1)F$

$\Sigma V=0$ → $\sqrt{2}F-R_a-R_{bV}=0$

$\Sigma M_B=0$ → $\sqrt{2}F\times a-F\times a-R_a\times a=0$
〜 $R_a=(\sqrt{2}-1)F$
$R_{bV}=F$

〜 $R_b=(R_{bH}^2+R_{bV}^2)^{0.5}=(4-2\sqrt{2})^{0.5}F=1.08F$

＊ 力の多角形は右図の通り。
矢印の連結順序によって他の形もあり得る。



問７）長さL＝200cm の棒を引張ったところ、L＝200.05cm になった。伸びひずみεを求めよ。

解）$\varepsilon=(\Delta L)/L=0.05/200=0.00025=2.50\times10^{-4}$

問８）１辺長12cmのサイコロの下面を固定し、上面にＴ＝250Nの力を面と平行に作用させたとき、上面がδ＝0.0842mmだけ傾いた。サイコロに作用しているせん断応力τと、せん断ひずみγ及び上面の傾斜角(ねじれ角)θを求めよ。

解）$\tau=250\text{N}/(0.12\times0.12)=17400\text{N/m}^2=17.4\text{kN/m}^2=17.4\text{kPa}$

$\gamma=0.0842/120=7.02\times10^{-4}$　　$\theta=\tan^{-1}(7.02\times10^{-4})=7.02\times10^{-4}$ﾗｼﾞｱﾝ$=0.0402°$

【演習１.２】弾性／一次元応力〜ひずみ関係

問１） 長さL＝120cm，断面積A＝5cm^{2}の棒の両端に F＝80.4kNの引張力を加えたとき、軸方向の応力σ、ひずみε、および伸び量⊿Lはいくらか。 弾性率はE＝200kN/mm^{2}とする。

解） $\sigma = F/A = 16.1\mathrm{kN/cm^2} = 0.161\mathrm{kN/mm^2} = 161\mathrm{N/mm^2} = 161\mathrm{MPa}$
$\varepsilon = \sigma/E = 0.161/200 = 8.05\times10^{-4}$ → $\Delta L = \varepsilon\times L = 0.0966\mathrm{cm} = 0.966\mathrm{mm}$

問２）直径d＝16mm，長さL＝3mの丸棒がF＝16.8kNの引張力を受けて⊿L＝2.2mm伸びた。棒に生じる軸方向応力σと、材料の弾性率Eを求めよ。

解） $A = 2.01\mathrm{cm^2}$， $\sigma = F/A = 0.0836\mathrm{kN/mm^2} = 83.6\mathrm{N/mm^2} = 83.6\mathrm{MPa}$
$\varepsilon = 0.22/300 = 7.33\times10^{-4}$ → $E = \sigma/E = 114\mathrm{kN/mm^2} = 1.14\times10^5\mathrm{MPa} = 114\mathrm{GPa}$

問３）直径d＝10mm，長さL＝2mの丸棒を F＝5.0kNで引張ったとき、変形後の伸び量⊿Lと直径の変化量⊿dはいくらか。（E＝200kN/mm^2， ν＝0.28）

解） $A = 78.5\mathrm{mm^2}$， $\sigma = F/A = 0.0637\mathrm{kN/mm^2} = 63.7\mathrm{N/mm^2} = 63.7\mathrm{MPa}$
$\varepsilon_L = \sigma/E = 0.0637/206 = 3.19\times10^{-4}$ → $\Delta L = \varepsilon_L\times L = 0.0638\mathrm{cm} = 0.638\mathrm{mm}$
$\varepsilon_d = -\nu\,\varepsilon_L = -8.93\times10^{-5}$ → $\Delta d = \varepsilon_d\times d = -8.93\times10^{-4}\mathrm{mm}$

問４）直径d＝30mm の丸棒の軸方向に引張力Fを加えたとき、直径が⊿d＝0.025mm 減少した。Fはいくらか。 (E＝78.4kN/mm^2， ν＝0.30)

解） $A = 707\mathrm{mm^2}$， $\varepsilon_d = \Delta d/d = -0.025/30 = -8.33\times10^{-4}$
$\varepsilon_L = -\varepsilon_d/\nu = 2.78\times10^{-3}$ → $\sigma = \varepsilon_L\times E = 0.218\mathrm{kN/mm^2}$， $F = \sigma\times A = 154\mathrm{kN}$

問５）d＝15cm，h＝30cm の円筒形の供試体にF＝392kNの圧縮力を加えた。軸方向の圧縮量⊿hと直径の変化量⊿dを求めよ。（E＝29.4kN/mm^2， ν＝0.21）

解） $A = 177\mathrm{cm^2}$， $\sigma = F/A = -392/177 = -2.21\mathrm{kN/cm^2} = -0.0221\mathrm{kN/mm^2}$（$= -22.1\mathrm{MPa}$）
$\varepsilon_L = \sigma/E = -7.52\times10^{-4}$ → $\Delta h = \varepsilon_L\times h = -0.0226\mathrm{cm} = -0.226\mathrm{mm}$
$\varepsilon_d = -\nu\,\varepsilon_L = 1.58\times10^{-4}$ → $\Delta d = \varepsilon_d\times d = 2.37\times10^{-3}\mathrm{cm} = 0.0237\mathrm{mm}$

問６）直径d＝12mm，長さL＝150cmの棒を剛板に3本固定して引張力F＝48.5kNを加える。各棒が負担する引張応力σ、伸び量⊿L、直径変化量⊿dはいくらか。
（E＝84.0kN/mm^2， ν＝0.23）

解） １本の断面積$A = 113\mathrm{mm^2}$、$\sigma = F/(A\times3) = 0.143\mathrm{kN/mm^2}$
$\varepsilon_L = \sigma/E = 1.70\times10^{-3}$ → $\Delta L = \varepsilon_L\times L = 2.25\mathrm{mm}$
$\varepsilon_d = -\nu\,\varepsilon_L = -3.91\times10^{-4}$ → $\Delta d = \varepsilon_d\times d = -4.69\times10^{-3}\mathrm{mm}$

問７）直径d＝10cm，長さL＝50cmの円柱を２本使用してW＝20kNの重り支える。円柱の収縮量⊿Lと2本の円柱を１本のバネで表現した場合のバネ定数kを求めよ。(E＝1960MPa)

解）柱１本A＝78.5cm^2、σ＝W/(2A)＝－0.127kN/cm^2＝－0.00127kN/mm^2＝－1.27MPa
ε_L＝σ/E＝－6.48×10^{-4}　→　ΔL＝ε_L×L＝－0.0324cm＝－0.324mm
E＝196kN/cm^2　→　k＝E(2A)/L＝615kN/cm=6.15×10^4kN/m

問８）１辺８cmの立方体（E＝29.4kN/mm^2，ν＝0.25）の上面に沿ってT＝118kNのせん断力を作用させたとき、立方体内に生じるせん断応力τと上面のずれ変位量δを求めよ。

解）τ＝118/(8×8)＝1.84kN/cm^2＝0.0184kN/mm^2＝18.4MPa、G＝E/2(1+ν)＝11.8kN/mm^2
γ＝τ/G＝1.56×10^{-3}　→　δ＝γ×8＝0.0125cm

問９）右図の地盤の表面荷重q＝150kN/m^{2}による沈下量を求めよ。また、この地盤を重み付き平均のE＝（E_1H_1＋E_2H_2)/(H_1＋H_2）を有する均一な単一層とみなしたときの沈下量はいくらか。

解）各層の圧縮量は、s_1＝(q/E_1)H_1，s_2＝(q/E_2)H_2　だから
s＝s_1＋s_2＝q(H_1/E_1＋H_2/E_2)＝3.06＋1.95＝5.01cm
単一層と考えた時、E＝236.6/8＝29.6MPa　→　s＝q(H_1＋H_2)/E＝4.05cm

【演習１.３】安全率の概念

問１）降伏応力σ_y＝235N/mm^2，直径d＝2mm の鋼線を使って重りWを吊す。
① 鋼線を10本使用したとき、吊し得る最大の重り重量を求めよ。
②W＝12kNのとき、安全率F_s≧3 を確保するための本数を求めよ。

解）１本A＝3.14mm^2、１本最大耐力F_y＝σ_yA＝738N
①W＝F_y×10本＝7380N＝7.38kN
②必要本数をxとして　F_s＝738×x/12000≧3.0　→　x≧48.8本（49本）

問２）上と同じ材料のd＝30mm の丸棒がF＝120kNの引張力を受けるとき、F_sはいくらか。

解）A＝707mm^2　F_s＝235×707/120000＝1.38

問３）せん断に関するネジの降伏応力がτ_y＝124MPaのとき、F＝250kNの力を支えるためには、d＝20mm のネジが最低何本必要か。d＝10mm のネジではどうか。

解）１本A＝314mm^2、１本最大耐力F_y＝τ_yA＝0.124kN/mm^2×314mm^2＝38.9kN
F_s＝1　→　38.9×x＝250　→　x＝6.43（7本以上）
d＝10mmのネジはAが1/4、F_yも1/4　(38.9/4)×x＝250　→　x＝25.7（26本以上）

問４）図のナックルジョイントが P＝22kNの引張荷重を受けるとき、ピンの安全な直径dを求めよ。許容せん断応力τ_a＝60.0MPaとする。

解）ピンは２箇所で切断される。ピンの断面積Aとして、安全な条件はτ＝P/(2A)≦τ_a
→　22/(2A)≦60000　→　A≧1.83×10^{-4}m^2＝1.83cm^2、d≧1.53cm

問５）図のようなパンチで厚さｔの板に直径ｄの孔を開ける。材料のせん断強さと圧縮強さが各々τ_f＝204MPa，σ_f＝420MPaのとき、ｔ＝4mmの板にｄ＝15mmの孔をあけるに必要な荷重Ｐとパンチ内の圧縮応力σ_cを求めよ。

解）τ_f＝204MPa＝204000kN/m^2＝0.204kN/mm^2
孔が空く＝せん断破壊：$P_\tau = \pi d t \times \tau_f$＝38.4kN　　※圧縮破壊の安全率
このとき、$\sigma_c = P_\tau/(\pi d^2/4)$＝0.217kN/mm^2＝217MPa＜$\sigma_f$　　F_s＝420/217＝1.94
※孔がつぶれる＝圧縮破壊：$P_c=(\pi d^2/4)\times\sigma_f$
孔があく条件：$P_\tau < P_c$　→　$P_\tau/P_c = 4(\tau_f/\sigma_f)(t/d) < 1$
→　$t/d < \sigma_f/(4\tau_f)$　0.5

問６）圧縮と引張の許容応力がσ_a＝105MPaの材料で図のようなトラス構造を作ったとき、Ｃ点にかけ得る最大荷重Ｐを求めよ。両部材は直径ｄ＝20mmとする。

解）ACとBC内に作用する部材力をT_1，T_2、BCが鉛直となす角をθとして
力のつり合い：$\sum H=0$　～　$T_1\cos\theta + T_2\sin\theta = 0$
$\sum V=0$　～　$T_1\sin\theta - T_2\cos\theta = P$
より、$T_1=(4/5)P$、$T_2=-(3/5)P$　で、部材ACの方が破壊に近い。
よって、最大荷重$P=(5/4)T_1=(5/4)(\sigma_a A)$＝41.2kN

問７）直径ｄ＝20mmの丸棒を深さＬだけ壁に埋込む。材料のせん断強さτ_f＝114MPa、棒と壁の間の付着強度c_a＝1.47MPaとして次を求めよ。
①θ＝0，Ｌ＝50cm　の場合に負担し得る最大引張荷重Ｆ
②θ＝0，Ｆ＝35.4kNの時、棒の抜けに関する安全率を2.5以上にするための最小深さL
③L＝50cm，Ｆ＝20.5kN，θ＝30°　の棒の抜けとせん断に関する安全率

解）①$F = c_a\times\pi d\times L$＝46.2kN　（$c_a$＝1.47×10^{3}kN/m^2）
②$F_s = c_a\times\pi d L/35.4 \geqq 2.5$　→　L≧95.9cm
③$N=F\cos\theta$，$T=F\sin\theta$　→　F_s(抜け)＝$c_a\pi d L/F\cos\theta$＝2.60
F_s(せん断)＝$(\pi d^2/4)\times\tau_f/F\sin\theta$＝3.49

【演習１.４】摩擦の概念

問１）１辺長ａ＝50cm の立方体コンクリートブロック（単位体積重量γ＝23kN/m^3）をθ＝30°の斜面上（摩擦係数μ＝0.710）に乗せたとき、①すべりに関する安全率Fs はいくらか。②安全率を　Fs≧2.5　にするために必要なアンカー力Ｆはいくらか。

解）$W=\gamma\times a^3$＝23kN/m^3×0.125m^3＝2.88ｋN
Wを斜面に垂直な成分Ｎと平行な成分Ｔに分解すると
N＝Wcos30°＝2.49kN　T＝Wsin30°＝1.44kN
①　すべり抵抗力$T_f=\mu N$＝1.77kN
$F_s=T_f/T$＝1.77/1.44＝1.23
②　$F_s=T_f/(T-F)\geqq 2.5$
→　1.77/(1.44−F)　≧2.5　→　F≧0.732kN