第３章　金属の塑性力学

3.1　塑性変形とひずみ増分

●弾性範囲内では、外力に伴う変形は外力値だけに依存し、載荷の履歴には無関係であるが、降伏応力と呼ばれる応力を越えて載荷すると、非可逆的な永久変形として「塑性変形」が残る。材料の塑性挙動を調べるには、引張（または圧縮）試験を行って応力～ひずみ曲線を求める（図－3.1)。図で点Ｒは「比例限界」であり、この間では応力～ひずみ関係は直線的である。Ｒを越えて応力を増すと直線から離れるが、点Ａまでは除荷により永久変形は生じない。 点Ａを「降伏点」、その時の応力を「降伏応力」と呼ぶ。点Ｂで除荷するとやや上に凹の曲線を描いて点Ｃに至り、永久(塑性)ひずみ ε^{p} が残る。 と同時に、ε^{e} の弾性回復ひずみも生じる。再載荷を行うと、やや上に凸な曲線を経て点Ｂ付近に戻り、その後は除荷前の応力～ひずみ曲線を延長した曲線上をたどる。除荷・再載荷曲線の平均勾配はヤング率にほぼ等しく、図から再載荷時には点Ｂまで降伏点が増大したことを意味する。すなわち、材料は塑性ひずみの進行とともに降伏応力が増し、「ひずみ硬化」を示す。図では点Ｄから除荷、更に応力の向きを逆転して圧縮を行う過程を示している。一般に金属が引張られる

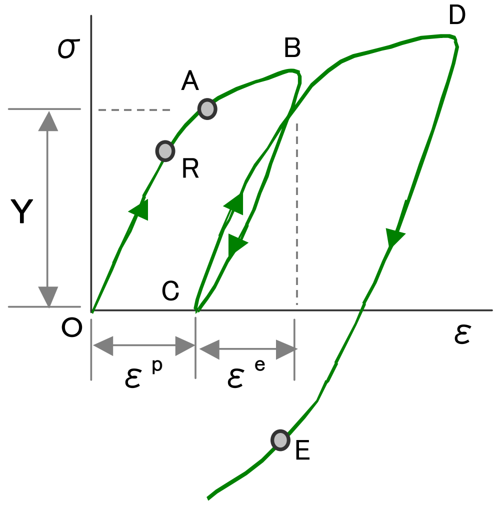


図-3.1　応力～ひずみ曲線

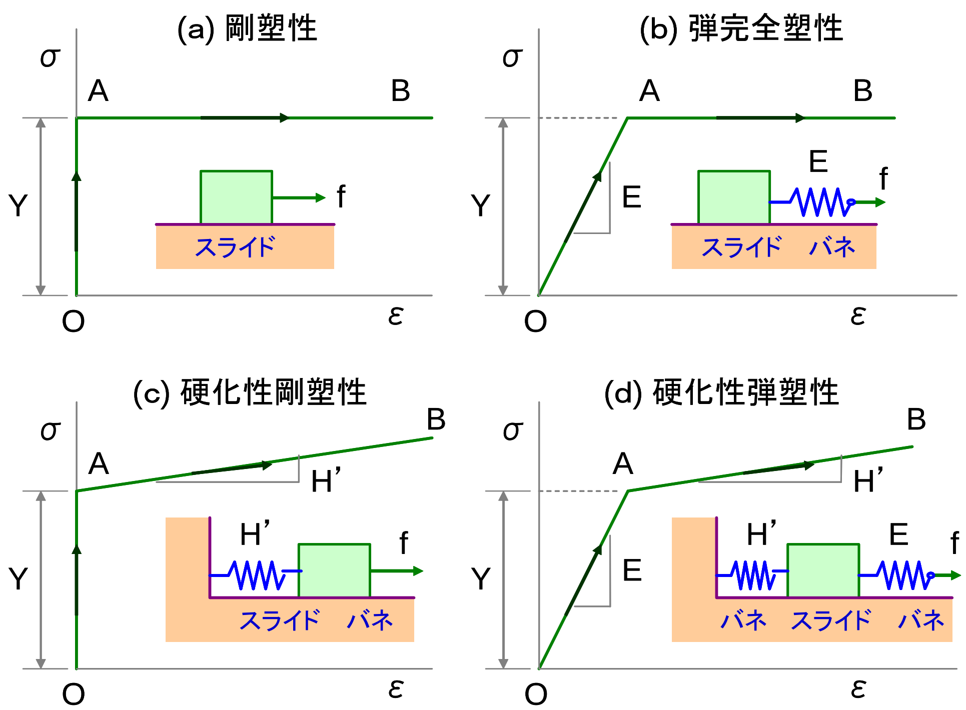


図-3.2　単純化された応力～ひずみ曲線

と、結晶軸が負荷方向に回転して選択方位を生じるので、負荷前には等方性（結晶方向がランダム）であっても塑性変形に伴って異方性を示す。したがって、塑性変形が生じた後に除荷すると、事前に存在していた異方性のために残留応力が生じ、これが逆負荷の降伏応力に影響を与え、引張降伏応力σ_Dより低い圧縮降伏応力（$\sigma_E < \sigma_D$）をもたらす。これを「バウシンガー効果」という。

●引張･圧縮試験のような一次元応力～ひずみ関係を、一般の三次元応力状態に拡張するためには、応力～ひずみ曲線の単純化(理想化)が必要であり、図－3.2 に数例示す。(ａ)剛塑性体ではヤング率を無限大として弾性ひずみとひずみ効果を無視する。これは土のように塑性変形（すべり変形）に比べて弾性変形が無視し得る材料に有用な近似である。(ｂ)弾完全塑性体では弾性ひずみの存在は許すが硬化性はないと考える。(ｃ)硬化性剛塑性体は、塑性変形が大きく、かつ硬化性が無視できない場合である。(ｄ)硬化性弾塑性体は、(ｃ)を更に一般化したものである。

●塑性応力と塑性状態のひずみは１対１の対応が付けられないことは、図－3.1で同じ応力に対するひずみが確定しないことから明かである。また、一般に塑性ひずみは大きいから、現在の変形状態と僅かに進んだ状態の間の「ひずみ増分」を考え、最終ひずみはこれら微小なひずみ増分を履歴にしたがって集めた(積分した)ものと考えなければならない。右図において、物体要素の変形前の位置を（x_0, y_0, z_0)、変形途中の位置を（x, y, z）とし、更に微小変形が起こって要素が微小変位（du, dv, dw）を行うとする。このような変位増分によって生じるひずみは、第１章の微小ひずみ論で定義したひずみと同様の形で表示され、例えば

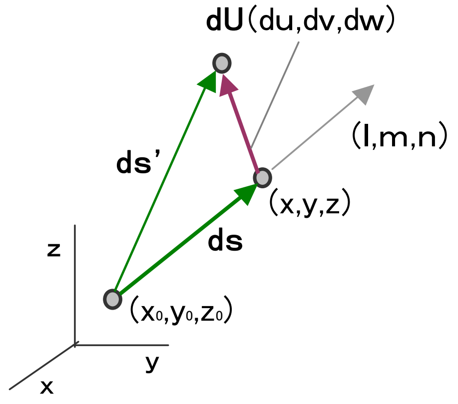


図-3.3　ひずみ増分

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial du}{\partial x} \qquad d\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial dw}{\partial y} + \frac{\partial dv}{\partial z}\right] \qquad (3.1)$$

$d\varepsilon_x$, $d\gamma_{yz}$等をひずみ増分と呼び（テンソル量)、弾性ひずみ増分と塑性ひずみ増分の和と考えられる。第１章のひずみ式ではｄがなく、またx, y, zは変形前に物体要素が有した座標であるに反し、上式ではx, y, zが着目要素の変形中にとる座標であることに注意する。すなわち、ひずみ増分は変形途中の瞬間的状態に関して計算される量である。

●長さs_0の棒の一端を固定して軸方向に引張る。長さがsになった状態で始めx_0にあった要素がxにきたとする。この間の変位は$u = x - x_0$で与えられ、変形は一様であるから

$$① \frac{x}{x_0} = \frac{s}{s_0} \;\rightarrow\; \frac{dx}{x_0} = \frac{ds}{s_0} \qquad ② u = x - x_0 = \left(1 - \frac{x_0}{x}\right)\cdot x = \left(1 - \frac{s_0}{s}\right)\cdot x \qquad (3.2)$$

ここでsを、塑性変形を表す何らかの尺度と考え、$u = u(x,\ s)$（場所と変形状態の関数）とみなせば

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial u}{\partial s}\cdot ds=\left(1-\frac{s_0}{s}\right)\cdot dx+\frac{s_0}{s^2}\cdot xds$$

$$=\left(1-\frac{s_0}{s}\right)\cdot\frac{x_0}{s_0}ds+\frac{s_0}{s^2}\cdot xds=\left(1-\frac{s_0}{s}\right)\cdot\frac{x}{s}ds+\frac{s_0}{s^2}\cdot xds$$

$$=\frac{x}{s}\cdot ds=\frac{x_0}{s_0}\cdot ds$$

となって、ひずみ増分を積分して

$$d\varepsilon=\frac{\partial du}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xds}{s}\right)=\frac{ds}{s}\quad\rightarrow\quad\varepsilon=\log\frac{s}{s_0}\qquad(3.3)$$

一方、初期の長さs_0を基準としてひずみ増分を考えると

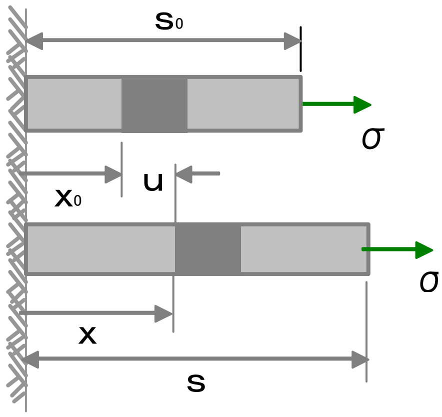


図-3.4　対数ひずみ

$$de=\frac{\partial du}{\partial x_0}=\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{x_0ds}{s_0}\right)=\frac{ds}{s_0}\quad\rightarrow\quad e=\frac{s-s_0}{s_0}$$

上のｅは第１章で述べたひずみであり、「工学ひずみ」または「公称ひずみ」という。これに対し、式(3.3)のひずみ増分に対応するεを「対数ひずみ」と呼ぶ。 両者の関係は

$$\varepsilon=\log(1+e)\qquad(3.4)$$

であり、ｅ<<１（微小ひずみ）なら ε≒ｅ になる。なお、対数ひずみと対応して、塑性変形が大きい場合は［力／変形時の面積］で応力を定義すべきであり、これを「真応力」という。これに対し、通常の［力／原面積］で定義される応力を「公称応力」と称する。

※断面補正

土の圧縮試験では大きいひずみ範囲まで扱うので、データ整理に際して断面積Ａを軸ひずみεに対応して補正する。初期断面積をA_0とすると、軸荷重Ｐ、軸ひずみεの時の軸応力σは

$$\sigma=\frac{P}{A}=\frac{P}{A_0}\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{100}\right)$$

で計算する。上式は供試体の体積が試験中一定であるという条件から定まる。すなわち、供試体の高さを初期H_0、軸ひずみεのときH、収縮量$\Delta H=H_0-H$とすると、$\varepsilon=\Delta H/H_0$

$$A_0H_0=AH=A(H_0-\Delta H)\quad\rightarrow\quad A=A_0/(1-\varepsilon/100)$$

3.2　降伏条件

●偏差応力：３次元の応力（$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$）のうち、垂直応力から静水圧（等方応力）成分と呼ばれる平均垂直応力：$\sigma_m=(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)/3$ を差し引いて得られる

$$\sigma_x'=\sigma_x-\sigma_m,\quad\sigma_y'=\sigma_y-\sigma_m,\quad\sigma_z'=\sigma_z-\sigma_m,\quad\tau_{yz},\quad\tau_{zx},\quad\tau_{xy}\qquad(3.5)$$

を「偏差応力（deviator stress）」という。偏差応力［σ_{ij}'］も［σ_{ij}］と同じ対称テンソルであり、

その不変量は次式で表される。（第 1 章、式(1.16)）

$$I_1' = \sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = \sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0$$

$$I_2' = -(\sigma_y'\sigma_z' + \sigma_z'\sigma_x' + \sigma_x'\sigma_y') + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (3.6)$$

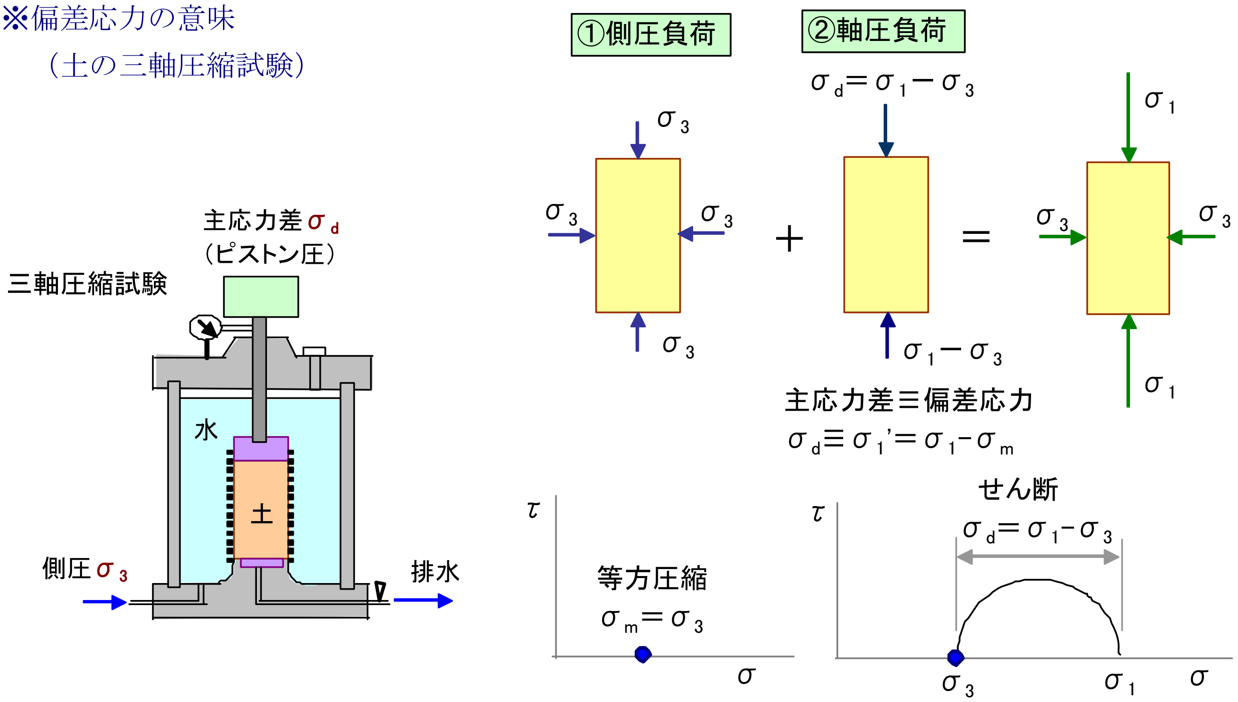
$$= \{\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)\} / 2$$

$$= \{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)\} / 6$$

$$= \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} / 6 = (3/2)\tau_{oct}^2$$

$$I_3' = \sigma_x'\sigma_y'\sigma_z' + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - \sigma_x'\tau_{yz}^2 - \sigma_y'\tau_{zx}^2 - \sigma_z'\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

※偏差応力の意味
（土の三軸圧縮試験）



●主応力空間表示：要素の応力状態は、直交する 3 主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を直交座標にとった主応力空間の 1 点で表される。図－3.5 で各主応力軸に等傾（方向余弦が全て $1/\sqrt{3}$）な対角線 n を考え、原点を通り n に直交する平面を π 面と呼ぶと、π 面上では $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ (※) である。いま、この $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 空間内の応力ベクトルＯＳ$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$を π 面に垂直な成分ＯＱと平行な成分ＯＰに分解すると、|ＯＱ|（＝|ＯＳ|cos δ）はベクトルＳ$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$の ***n*** 方向成分であるから、内積より

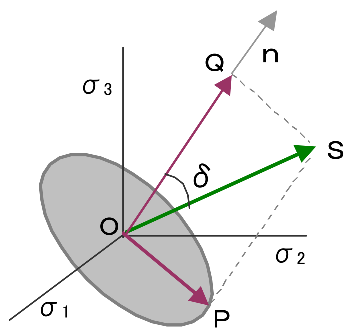


図-3.5　主応力空間

$$|OQ| = (\sigma_1, \ \sigma_2, \ \sigma_3)\ (1/\sqrt{3}, \ 1/\sqrt{3}, \ 1/\sqrt{3})$$

$$= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/\sqrt{3} = \sqrt{3}\,\sigma_{oct} \qquad (3.7)$$

であり、ＯＱ＝$\{\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m\}$ は平均垂直応力を表す応力ベクトルになる。また、ベクトル和をとると

$OP = OS - OQ = \{\sigma_1 - \sigma_m,\ \sigma_2 - \sigma_m,\ \sigma_3 - \sigma_m\} = \{\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'\}$

すなわち、ＯＰは偏差応力の主成分を表し

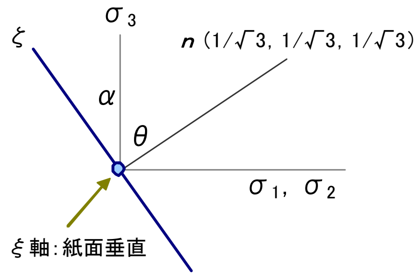
$$|OP| = (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2)^{1/2} = \sqrt{2I_2'} = \sqrt{3}\,\tau_{oct} \qquad (3.8)$$

※π面で $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$ であることは、π面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ $(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3})$ とπ面上の１点を表すベクトル $\boldsymbol{\sigma}(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3)$ が直交する条件から

$$\text{内積：}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sqrt{3}} = 0 \ \rightarrow\ \pi\text{面上で}\quad \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$$

● σ_3 軸のπ面への射影をζ軸、それと垂直にξ軸をとると、両軸の方向余弦は、

	σ_1	σ_2	σ_3
ξ	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
ζ	$-1/\sqrt{6}$	$-1/\sqrt{6}$	$2/\sqrt{6}$



となり、σ_ξ, σ_ζ の値は

$$\sigma_\xi = (\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \sigma_3)(1/\sqrt{2}\ \ -1/\sqrt{2}\ \ 0) = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma_\zeta = (\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \sigma_3)(-1/\sqrt{6}\ \ -1/\sqrt{6}\ \ 2/\sqrt{6}) = \frac{2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2}{\sqrt{6}}$$

で与えられる。σ_ξ と σ_ζ で作る比

$$\sqrt{3}\tan\theta = \sqrt{3}\frac{\sigma_\zeta}{\sigma_\xi} = \frac{2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2} = \mu \qquad (3.9)$$

を Lodeの応力係数といい（$-1 \leqq \mu \leqq 1$）、３次元応力状態を表示する第３のパラメータとして用いられる。代表的な応力状態と μ, θ 値との対応は以下のようになる（図−3.6）。

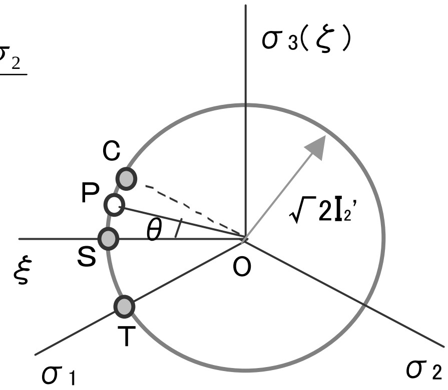


図-3.6　代表的な応力状態

点Ｔ：$\sigma_1>0$, $\sigma_2=\sigma_3=0$　単軸引張　（$\mu=-1$ ／ $\theta=-30°$）

$\mu=-1$：式(3.9) → $\sigma_2=\sigma_3$ → 単軸引張($\sigma_1'=\sigma_1-\sigma_3>0$, 0, 0)＋等方応力 σ_3

点Ｃ：$\sigma_1=\sigma_3=0$, $\sigma_2<0$　単軸圧縮　（$\mu=1$ ／ $\theta=30°$）

$\mu=1$：式(3.9) → $\sigma_1=\sigma_3$ → 単軸圧縮(0, $\sigma_2'=\sigma_2-\sigma_3<0$, 0)＋等方応力 σ_3

点Ｓ：$\sigma_1=-\sigma_2$, $\sigma_3=0$　純粋せん断（$\mu=0$ ／ $\theta=0°$）

$\mu=0$：式(3.9) → $\sigma_3=(\sigma_1+\sigma_2)/2$ → $\sigma_m=(\sigma_1+\sigma_2)/2=\sigma_3$ → $\sigma_1'=(\sigma_1-\sigma_2)/2$,

$\sigma_2'=-(\sigma_1-\sigma_2)/2$, $\sigma_3'=0$　　純粋せん断＋等方応力 σ_m

●等方性材料の降伏条件：降伏条件が主応力値のみに依存し、等方的なら、一般的な表現は

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=0 \qquad (3.10\,a)$$

であるが、対称な関数（$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を入れ換えても形を変えない）であるためには

$$f(I_1, I_2, I_3)=0 \qquad (3.10\,b)$$

でなければならない。更に、金属材料では降伏条件が静水圧成分の影響を受けないので

$$f(I_2', I_3')=0 \quad (I_1'=0) \qquad (3.10\,c)$$

偏差応力はπ面内のベクトルで表されるので、上式はπ面に垂直な柱面を表す。

（１） Tresca規準：最大せん断応力説

$$|\sigma_i-\sigma_j| = 2k \qquad (3.11)$$

最大せん断応力 $\tau_{max}=(\sigma_i-\sigma_j)/2$ がせん断降伏応力ｋに一致する条件である。引張降伏応力をＹとすると、単軸引張では $\sigma_1=Y$，$\sigma_2=\sigma_3=0$ だから $k=Y/2$ の関係を得る[*1)]。$\sigma_1 \geqq \sigma_3 \geqq \sigma_2$ のとき[*2)]、降伏条件は $\sigma_1-\sigma_2=Y$ であるから、図－3.6 のξ軸方向の応力 σ_ξ は降伏時に $\sigma_\xi=(\sigma_1-\sigma_2)/\sqrt{2}=Y/\sqrt{2}$＝一定で、π面上ではζ軸に平行な線となる。$\sigma_i-\sigma_j$の他の組み合せからも同様な線が描かれ、降伏曲面のπ面の切口は図-3.7のように正六角形になる。

（２）von Mises規準：せん断ひずみエネルギー説

$$I_2'=k^2 \qquad \text{または}$$

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=6k^2 \qquad (3.12)^{*3)}$$

これは単位体積当りのせん断弾性ひずみエネルギーが定値に達したとき降伏が起こる条件である。右辺の定数($6k^2$)は、例えば純粋せん断条件：$\sigma_1=-\sigma_3=k$，$\sigma_2=0$より定まる。単軸引張とすると、左辺＝$2Y^2$になるから、Mises規準ではｋとＹの関係が

$$k=Y/\sqrt{3} \fallingdotseq 0.577Y$$

となり、Tresca規準の関係と約15%の差がある。式(3.8)と式(3.12)より、Mises規準のπ面面の切口は円であり、その半径は

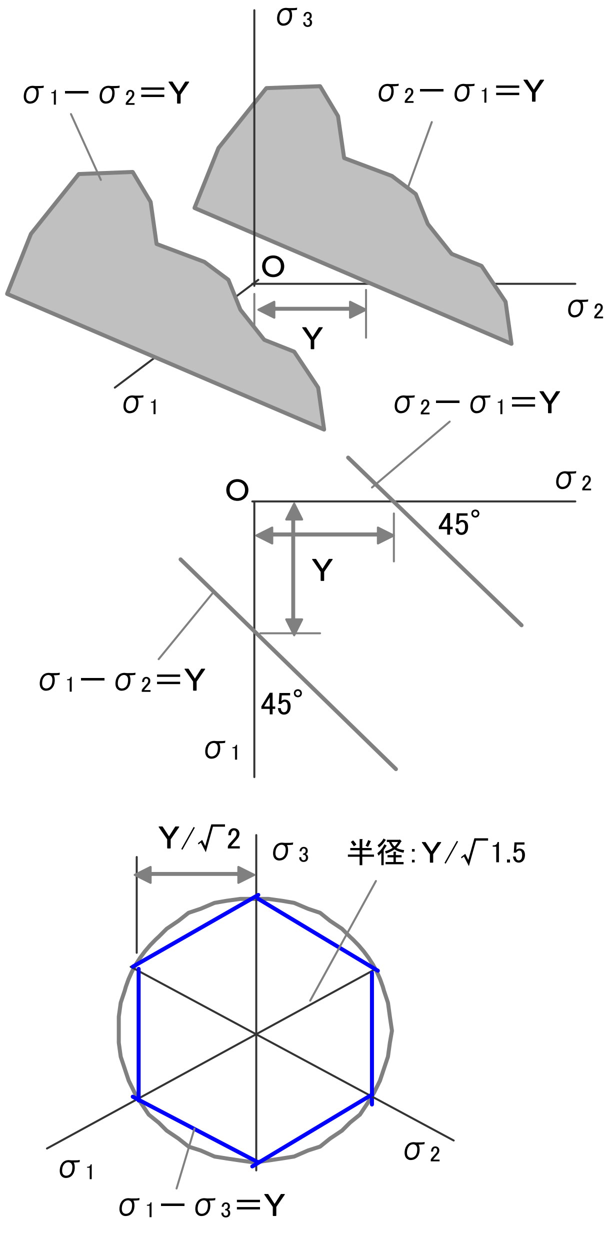
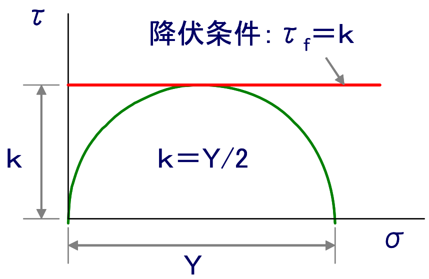


図-3.7 Tresca と Mises規準

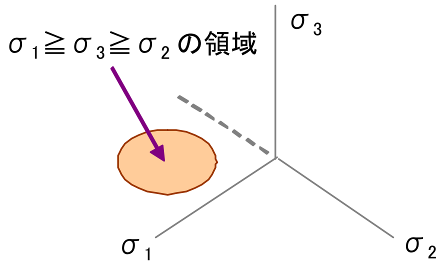
$$|OP| = \sqrt{2I_2'} = \sqrt{2/3}Y$$

である。幾何学的な関係により、Tresca規準の正六角形は Mises規準の円に内接する。両者は単軸引張・圧縮（図-3.6 の点C,T）で一致し、純粋せん断（点S）で差が最大になり、その比は（$Y/\sqrt{1.5})/(Y/\sqrt{2})=2/\sqrt{3}=1.155$ である。なお、ひずみ硬化材料の場合は、kやYがひずみとともに増加すると考える。

*1) 単軸引張：降伏条件とモール円表示



*2) 三次元の応力状態

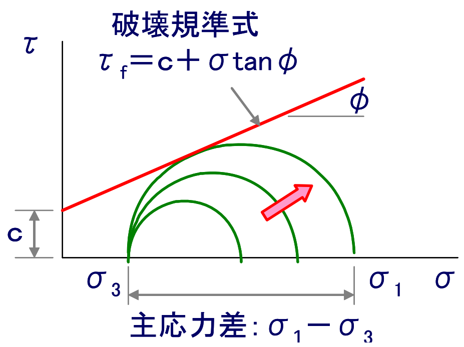


*3) 種々の応力状態におけるMises 規準：式(3. 12)の表現

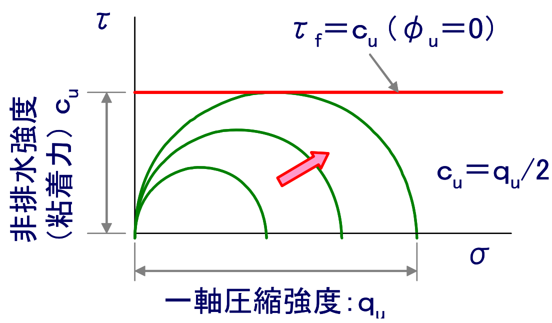
- 純粋せん断では $\sigma_1=-\sigma_3=k$，$\sigma_2=0$ で、左辺$=k^2+k^2+(2k)^2=6k^2$
- 単軸引張では $\sigma_2=\sigma_3=0$，$\sigma_1=Y$ で、左辺$=2Y^2=6k^2$ → $Y=\sqrt{3}k$
- 式(3. 12)より $(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=9\tau_{oct}^2=6k^2$
  $OP=(2I_2')^{0.5}=\sqrt{2}k=(2/3)^{0.5}Y=$一定 → 切り口は円

※土の破壊(降伏)条件：モール・クーロンの破壊規準式

①三軸圧縮試験

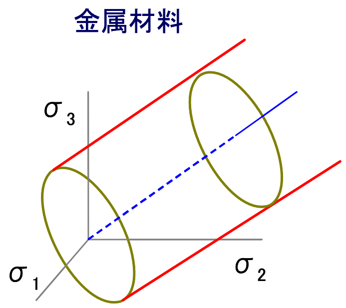


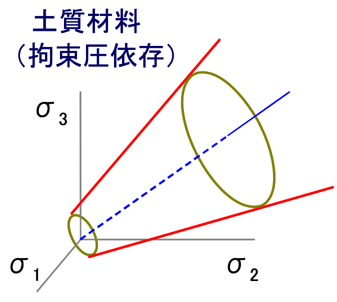
②一軸圧縮試験（飽和粘土）



※降伏曲面

土質材料は降伏条件が拘束圧σに依存する（$\tau_f = c + \sigma \tan\phi$）





3.3　塑性状態における応力～ひずみ関係

●弾性状態の応力～ひずみ関係:全ひずみ ε_{ij} は弾性ひずみ $\varepsilon_{ij}{}^{e}$と塑性ひずみ $\varepsilon_{ij}{}^{p}$の和で与えられる。

偏差応力［σ_{ij}'］と対応して、平均垂直ひずみ　$\varepsilon_m=(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)/3$ を垂直ひずみから差し引いて、偏差ひずみ［ε_{ij}'］を

$$\varepsilon_x'=\varepsilon_x-\varepsilon_m,\ \ \varepsilon_y'=\varepsilon_y-\varepsilon_m,\ \ \varepsilon_z'=\varepsilon_z-\varepsilon_m,\ \ \gamma_{yz},\ \gamma_{zx},\ \gamma_{xy}$$

のように定義すると、弾性の応力～ひずみ関係（フック則）は

$$\frac{\varepsilon_x{}^{e}{}'}{\sigma_x'}=\frac{\varepsilon_y{}^{e}{}'}{\sigma_y'}=\frac{\varepsilon_z{}^{e}{}'}{\sigma_z'}=\frac{\gamma_{yz}{}^{e}}{\tau_{yz}}=\frac{\gamma_{zx}{}^{e}}{\tau_{zx}}=\frac{\gamma_{xy}{}^{e}}{\tau_{xy}}=\frac{1}{2G}\qquad \text{または}\quad \varepsilon_{ij}{}^{e}{}'=\frac{\sigma_{ij}'}{2G}\qquad (3.13)$$

で表される。ただし、上式のせん断ひずみ $\gamma_{ij}{}^{e}$ はテンソルひずみである。

●弾性ひずみエネルギー（ポテンシャル）：単位体積当りの弾性ひずみエネルギーW^{e}は

$$W^{e}=(\sigma_x\varepsilon_x{}^{e}+\sigma_y\varepsilon_y{}^{e}+\sigma_z\varepsilon_z{}^{e}+2\tau_{yz}\gamma_{yz}{}^{e}+2\tau_{zx}\gamma_{zx}{}^{e}+2\tau_{xy}\gamma_{xy}{}^{e})/2$$

で与えられるが、これは次のように２つの部分に分解することができる。

$$W^{e}=3\sigma_m\varepsilon_m{}^{e}/2+(\sigma_x'\varepsilon_x{}^{e}{}'+\sigma_y'\varepsilon_y{}^{e}{}'+\sigma_z'\varepsilon_z{}^{e}{}'$$
$$+2\tau_{yz}\gamma_{yz}{}^{e}+2\tau_{zx}\gamma_{zx}{}^{e}+2\tau_{xy}\gamma_{xy}{}^{e})/2\qquad (3.14)$$

＝ W_v（体積弾性ひずみエネルギー）＋ W_s（せん断弾性ひずみエネルギー）

式(3.13)の応力～ひずみ関係を使って W^{e}, W_v, W_s を応力成分で表すと

$$W_v=\frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)^2=\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_m{}^2=\frac{\sigma_m{}^2}{2K}\quad \left(K:\text{体積弾性率}\right)$$

$$W_s=\frac{\sigma_x'^2+\sigma_y'^2+\sigma_z'^2+2(\tau_{yz}{}^2+\tau_{zx}{}^2+\tau_{xy}{}^2)}{4G}=\frac{3\tau_{oct}{}^2}{4G}=\frac{I_2'}{2G}$$

$$W^{e}=\frac{\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2+\sigma_z{}^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)}{2E}+\frac{\tau_{yz}{}^2+\tau_{zx}{}^2+\tau_{xy}{}^2}{2G}$$

上式を応力成分で微分すると、次の関係が成立する。

$$\frac{\partial W^{e}}{\partial\sigma_x}=\varepsilon_x{}^{e}\ \ \text{など}\qquad \frac{\partial W^{e}}{\partial\tau_{yz}}=\gamma_{yz}{}^{e}\ \ \text{など}\qquad \frac{\partial W_v}{\partial\sigma_x}=\frac{\partial W_v}{\partial\sigma_y}=\frac{\partial W_v}{\partial\sigma_z}=\varepsilon_m{}^{e}$$

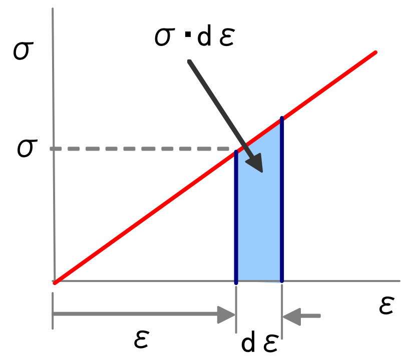
$$\frac{\partial W_s}{\partial\sigma_x}=\frac{\partial W_s}{\partial\sigma_x'}=\varepsilon_x{}^{e}{}'\ \ \text{など}\qquad \frac{\partial W_s}{\partial\tau_{yz}}=\gamma_{yz}{}^{e}\ \ \text{など}$$

ただし、せん断応力に関する微分では τ_{yz}と τ_{zy}を区別し、$2\tau_{yz}{}^2=\tau_{yz}{}^2+\tau_{zy}{}^2$ とみなして計算する。　このようにすると上の関係は

$$\frac{\partial W^{e}}{\partial\sigma_{ij}}=\varepsilon_{ij}{}^{e}\qquad \frac{\partial W_v}{\partial\sigma_{ij}}=\varepsilon_m{}^{e}\qquad \frac{\partial W_s}{\partial\sigma_{ij}}=\varepsilon_{ij}{}^{e}{}'\qquad (3.15)$$

と書ける。上式は弾性ひずみテンソルが弾性ひずみエネルギーの勾配で導かれることを意味し、W^e（W_v, W_s）などを「弾性ポテンシャル」と呼ぶ。

※ひずみエネルギー補足：



・ひずみエネルギー＝仕事

微小仕事：$\delta W=\sigma\cdot d\varepsilon=E\varepsilon\cdot d\varepsilon$ を積分して

仕事：$W=\int\sigma\cdot d\varepsilon=E\int\varepsilon\cdot d\varepsilon=\dfrac{E\varepsilon^2}{2}=\dfrac{\sigma\cdot\varepsilon}{2}$

・体積ひずみエネルギー（W_V）

体積ひずみ：$\varepsilon_v=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=3\varepsilon_m^e$

式(3.14) → $W_v=\dfrac{\sigma_m\cdot\varepsilon_v}{2}=\dfrac{\sigma_m}{2}\times\dfrac{\sigma_m}{K}=\dfrac{\sigma_m{}^2}{2K}$ → 応力成分表示

・弾性ポテンシャル

$$W^e\ \Rightarrow\ \frac{\sigma_x\cdot\varepsilon_x{}^e}{2}=\frac{\sigma_x}{2}\cdot\frac{1}{E}\left\{\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right\}=\frac{\sigma_x{}^2-\nu\sigma_x(\sigma_y+\sigma_z)}{2E}$$

$$\rightarrow\quad \frac{\partial W^e}{\partial\sigma_x}=\frac{2\sigma_x-2\nu(\sigma_y+\sigma_z)}{2E}=\varepsilon_x{}^e$$

同様に $$\frac{\partial W^e}{\partial\tau_{yz}}=\frac{\partial}{\partial\tau_{yz}}\left[\frac{1}{2G}\cdot\frac{\tau_{yz}{}^2+\tau_{zy}{}^2}{2}\right]=\frac{\tau_{yz}}{2G}=\gamma_{yz}$$ （τ_{yz} と τ_{zy} は区別して別個に扱う）

・せん断ひずみエネルギーの微分

$$\frac{\partial W_s}{\partial\sigma_x}=\frac{1}{4G}\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma_x}\left(\sigma_x-\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3}\right)^2+\frac{1}{4G}\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma_x}(\sigma_y-\bullet\bullet\bullet)^2+\frac{1}{4G}\cdot\frac{\partial}{\partial\sigma_x}(\sigma_z-\bullet\bullet\bullet)^2$$
$$=\frac{1}{4G}\cdot2\sigma_x{}'\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4G}\cdot2\sigma_y{}'\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4G}\cdot2\sigma_z{}'\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6G}(2\sigma_x{}'-\sigma_y{}'-\sigma_z{}')$$
$$=\frac{1}{6G}(2\sigma_x-\sigma_y-\sigma_z)=\frac{1}{6G}\{3\sigma_x-(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\}=\frac{1}{2G}\cdot\sigma_x{}'=\varepsilon_x{}^{e'}$$

●塑性ひずみ増分：完全塑性体では塑性変形を“ひずみ”でなく“ひずみ速度”あるいは“ひずみ増分”で定義する必要がある。全ひずみ増分を $d\varepsilon_{ij}$、弾性ひずみ増分を $d\varepsilon_{ij}{}^e$ とすると、塑性ひずみ増分は $d\varepsilon_{ij}{}^p=d\varepsilon_{ij}-d\varepsilon_{ij}{}^e$ で与えられる。 金属材料では塑性ひずみは非圧縮性（$d\varepsilon_m{}^p=0$, $d\varepsilon_m=d\varepsilon_m{}^e$）である（実験事実）から、偏差ひずみを用いて

$$d\varepsilon_{ij}{}^p=d\varepsilon_{ij}'-d\varepsilon_{ij}{}^{e}{}'=d\varepsilon_{ij}'-d\sigma_{ij}'/2G \qquad (3.16)$$

と表される。 対応して、塑性仕事増分 dW^p は、全仕事増分 dW から回復可能な弾性ひずみエネルギー増分 dW^e を差し引いて

$$dW^p = dW - dW^e = \Sigma\, \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}{}^p = \Sigma\, \sigma_{ij}' \cdot d\varepsilon_{ij}{}^p \quad \text{（塑性ひずみの非圧縮性）}$$

$$= \text{内積}\ \{\sigma'\}\ \{d\varepsilon^p\} = |\sigma'|\ |d\varepsilon^p| \cos\theta$$

$$= \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p \cos\theta \qquad (3.17)$$

ただし、下２行目の $\{\sigma'\}$，$\{d\varepsilon^p\}$ は偏差応力と塑性ひずみ増分のベクトルで、θ はそれらの交角である。また、下１行目の $\boldsymbol{\sigma}$，$d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ は相当応力および相当塑性ひずみ増分と呼ばれ、以下のように定義される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\}/2} = \sqrt{3I_2'} = \sqrt{3/2}|\sigma'| = \sqrt{3/2}\sqrt{\sigma_1'^2+\sigma_2'^2+\sigma_3'^2}$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \sqrt{2/3}|d\varepsilon^p| = \sqrt{2/3}\sqrt{d\varepsilon_1{}^{p2}+d\varepsilon_2{}^{p2}+d\varepsilon_3{}^{p2}} \qquad (3.18)$$

単軸引張時の引張応力を σ、引張塑性ひずみ増分を $d\varepsilon^p$ とすると $\sigma_1=\sigma$，$\sigma_2=\sigma_3=0$，$d\varepsilon_1{}^p=d\varepsilon^p$，$d\varepsilon_2{}^p=d\varepsilon_3{}^p=-0.5d\varepsilon^p$ であるから*)、$\boldsymbol{\sigma}=\sigma$，$d\boldsymbol{\varepsilon}^p=d\varepsilon^p$ に一致する。このように、$\boldsymbol{\sigma}$，$d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ は種々の組合せ載荷において応力～ひずみ関係を相互に比較する場合に用いられる。Mises規準は相当応力を用いて $\boldsymbol{\sigma}=Y$ と表される。

*)式(3. 18)の下で、単軸引張の場合は $d\varepsilon_1{}^p=d\varepsilon^p$，$d\varepsilon_2{}^p=d\varepsilon_3{}^p$ であるから、非圧縮性の性質：$d\varepsilon_m{}^p=d\varepsilon_1{}^p+d\varepsilon_2{}^p+d\varepsilon_3{}^p=0$ を使うと、$d\varepsilon_2{}^p=d\varepsilon_3{}^p=-0.5d\varepsilon^p$

● Prandtl-Reussの式：塑性状態では、偏差応力と塑性ひずみ増分の間に次の比例関係

$$\frac{d\varepsilon_x{}^p}{\sigma_x'} = \frac{d\varepsilon_y{}^p}{\sigma_y'} = \frac{d\varepsilon_z{}^p}{\sigma_z'} = \frac{d\gamma_{yz}{}^p}{\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}{}^p}{\tau_{zx}} = \frac{d\gamma_{xy}{}^p}{\tau_{xy}} = d\lambda$$

$$\text{または}\quad d\varepsilon_{ij}{}^p = \sigma_{ij}'d\lambda \quad (d\lambda>0) \qquad (3.19)$$

を考える。上式は式(3.13)の弾性応力～ひずみ関係で $\varepsilon_{ij}{}^{e}{}' \to d\varepsilon_{ij}{}^p$，$1/2G \to d\lambda$ に置き換えたものに対応する。上で $d\varepsilon_x{}^p+d\varepsilon_y{}^p+d\varepsilon_z{}^p=(\sigma_x'+\sigma_y'+\sigma_z')d\lambda=0$（塑性体積ひずみ増分＝0）であるから、塑性変形の非圧縮性条件が自動的に満たされる。また、応力の主軸と塑性ひずみ増分の主軸が一致し、等方体の関係であることが分かる。弾性と塑性の２つの応力～ひずみ関係：式(3.13)と式(3.19)をまとめ、式(3.16)の形で整理すると、次のように表される。

$$d\varepsilon_{ij}' = d\varepsilon_{ij}{}^{e}{}'+d\varepsilon_{ij}{}^p = d\sigma_{ij}'/2G + \sigma_{ij}'d\lambda \qquad (3.20)$$

さて、$d\lambda$ の値は、式(3.19)に加比の定理を用い*)、式(3.18)の $\boldsymbol{\sigma}$，$d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ より

$$d\lambda = 3\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p/2\boldsymbol{\sigma} = 3dW^p/2\boldsymbol{\sigma}^2 \qquad (3.21)$$

*)加比の定理：式(3. 19)で、$x\to1$，$y\to2$，$z\to3$ として

$$\frac{d\varepsilon_1{}^p}{\sigma_1'} = \frac{d\varepsilon_2{}^p}{\sigma_2'} = \frac{d\varepsilon_3{}^p}{\sigma_3'} = d\lambda \quad\rightarrow\quad \frac{\sqrt{d\varepsilon_1{}^{p2}+d\varepsilon_2{}^{p2}+d\varepsilon_3{}^{p2}}}{\sqrt{\sigma_1'^2+\sigma_2'^2+\sigma_3'^2}} = d\lambda = \frac{\sqrt{3/2}d\varepsilon^p}{\sqrt{2/3}\sigma} = \frac{3d\varepsilon^p}{2\sigma}$$

で表される。最後の関係はReuss式のように偏差応力と塑性ひずみ増分の成分が比例関係にあるとき、両ベクトル｛σ'｝,｛$d\varepsilon^p$｝が平行、すなわち、式(3.17)で交角 $\theta=0$ で

$$dW^p = |\sigma'|\,|d\varepsilon^p| = \boldsymbol{\sigma} \times d\boldsymbol{\varepsilon}^p \qquad (3.22)$$

なる性質を用いている。

●ひずみ硬化材の降伏条件：Tresca, Mises規準の降伏応力（k,Y）は、ひずみ硬化材では塑性変形の増加とともに増大する。一般に硬化特性はkまたはYが要素に関する全塑性仕事（$\int dW^p$）だけの関数であると考える。 全塑性仕事を W^p とせず $\int dW^p$ と書くのは、仕事が最終状態だけでは決まらず、ひずみ径路により変わることを明示するためである。 この表現によれば、式(3.22)を用いて、Mises規準は次のように表せる。

$$\boldsymbol{\sigma} = Y = f(\int dW^p) = f(\int \boldsymbol{\sigma}\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \qquad (3.23)$$

これを$\boldsymbol{\sigma}$ について解けば、ひずみ硬化塑性体に対し

$$\boldsymbol{\sigma} = H(\int d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \qquad (3.24)$$

の形の降伏条件式が得られる。

●以上の諸式を用いると、式(3.20)の全偏差ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}'$ は（式(3.21)を使う）

$$d\varepsilon_{ij}' = d\sigma_{ij}'/2G + 3\sigma_{ij}'\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p/2\boldsymbol{\sigma} = d\sigma_{ij}'/2G + 3\sigma_{ij}' dW^p/2\boldsymbol{\sigma}^2 \qquad (3.25)$$

となる。これが一般の硬化性材料のひずみ増分と応力の関係を規定する。式(3.24)のMises規準を用い、引張試験における応力（$\boldsymbol{\sigma}$）～ 塑性ひずみ（$\int d\boldsymbol{\varepsilon}^p$）図の傾斜をH'と表すと

$$d\varepsilon_{ij}' = 3\sigma_{ij}' d\boldsymbol{\sigma}/2\boldsymbol{\sigma} H' + d\sigma_{ij}'/2G \qquad (H' = d\boldsymbol{\sigma}/\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \qquad (3.26)$$

非硬化材料では、Y＝一定であるから、式(3.25)は

$$d\varepsilon_{ij}' = \sigma_{ij}' d\lambda + d\sigma_{ij}'/2G = 3\sigma_{ij}'\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p/2Y + d\sigma_{ij}'/2G \qquad (3.27)$$

※ひずみ硬化