# 解析学 A　第 6 回演習

**第 6 回演習問題**：テキスト p.71 問題 3 と次の追加問題 1,2 です．必ず計算過程を書いて提出する事．
(ヒント) 追加問題 1 は例題 1，テキスト p.71 問題 3 と追加問題 2 は例題 2 を参考にせよ．

**追加問題 1.** 次の関数 $f(z)$ は複素平面全体で正則である事を示し，$f'(z)$ を求めよ．また，$f'(z)$ と $f(z)$ を $z$ で表せ．

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

**追加問題 2.** $\mathrm{Re}\, f(z) = x^2 - y^2 + 2xy$ となる正則関数 $f(z)$ を求め，$z$ で表せ．

**(基本事項)** 複素関数 $w = f(z)$ が複素平面内の <u>領域 $D$ の全ての点 $z$ において微分可能である時</u>，$f(z)$ は $\boxed{D \text{ で正則}}$，または，$\boxed{D \text{ 上の正則関数}}$ と言う．また，ある領域で正則な関数を (領域を指定せずに) 単に“ 正則関数 ”と言う場合がある．

**定理.** $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy)$ と表した時，$f(z)$ が領域 $D$ で正則である必要十分条件は，$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ が $D$ において全微分可能で，かつ <u>コーシー・リーマンの方程式</u>

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}$$

が成り立つ事である (p.65 定理 5.4 参照)．$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が正則関数である時，導関数は

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x.$$

ここで，コーシー・リーマンの方程式を用いると次の様にも表される：

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = v_y - iu_y.$$

**例題 1.** 次の関数 $f(z)$ は複素平面全体で正則である事を示し，$f'(z)$ を求めよ．また，$f'(z)$ と $f(z)$ を $z$ で表せ．

$$f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$$

**(解答例)** $u = x^2 - y^2 - 2xy$, $v = x^2 - y^2 + 2xy$ とおくと

$$\begin{aligned} u_x &= 2x - 2y, \qquad & u_y &= -2y - 2x \\ v_x &= 2x + 2y, \qquad & v_y &= -2y + 2x \end{aligned}$$

より，$u, v$ は $xy$ 平面全体で連続な偏導関数を持つので全微分可能であり，また，コーシー・リーマンの方程式 $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$ を満たす．よって，$f(z)$ は複素平面全体で正則であり，導関数は

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x - 2y + i(2x + 2y).$$

次に $f'(z)$ と $f(z)$ を $z$ で表す．$z = x + iy, \overline{z} = x - iy$ より $x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ であるから

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2x - 2y + i(2x + 2y) = z + \overline{z} - \frac{z - \overline{z}}{i} + i\{z + \overline{z} + \frac{z - \overline{z}}{i}\} \\ &= z + \overline{z} + i(z - \overline{z}) + i(z + \overline{z}) + z - \overline{z} = 2z + 2iz = \underline{2(1 + i)z} \ \cdots ① \end{aligned}$$

①を $z$ について不定積分して

$$f(z) = \int f'(z)\, dz = \int 2(1 + i)z\, dz = 2(1 + i) \cdot \frac{z^2}{2} + C = (1 + i)z^2 + C \ \cdots ② \qquad (C \in \mathbb{C} \text{ は任意定数})$$

②に $z = 0$ を代入すると $f(0) = C$．一方，始めの与式 $f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$ に「$z = x + iy = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$」を代入すると $f(0) = 0$ である．比較して $C = 0$ を得る．これを ②に代入して $f(z) = \underline{(1 + i)z^2}$．　□

**例題 2.** $\mathrm{Re}\, f(z) = x^2 - y^2 + y$ となる正則関数 $f(z)$ を求め，$z$ で表せ.

**(解答例)** $f(z) = u + vi$, $u = x^2 - y^2 + y$, $v = \mathrm{Im}\, f(z)$ とおく．$f(z)$ の正則性よりコーシー・リーマンの方程式を満たすので $v_y = u_x = 2x$. これより

$$v = \int v_y\, dy = \int 2x\, dy = 2xy + \varphi(x) \cdots ① \qquad (\varphi(x) : x \text{ 変数の実数値関数})$$

①の両辺を $x$ で偏微分して, $v_x = 2y + \varphi'(x) \cdots ②$. この ②とコーシー・リーマンの方程式より

$$2y + \varphi'(x) = v_x = -u_y = -(-2y+1), \qquad \therefore\ 2y + \varphi'(x) = 2y - 1,$$
$$\therefore\ \varphi'(x) = -1, \qquad \therefore\ \varphi(x) = \int (-1)\, dx = -x + c \cdots ③ \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ は任意定数})$$

③を ①に代入して，$\underline{v = 2xy - x + c}$. 以上により

$$f(z) = u + vi = x^2 - y^2 + y + (2xy - x + c)i$$

次に $f(z)$ を $z$ で表す．$z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ より $x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ であるから

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 + y + (2xy - x + c)i \\ &= \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 + \frac{z-\overline{z}}{2i} + \left\{2\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) - \frac{z+\overline{z}}{2} + c\right\}i \\ &= \frac{z^2 + 2|z|^2 + \overline{z}^2}{4} + \frac{z^2 - 2|z|^2 + \overline{z}^2}{4} - \frac{z-\overline{z}}{2}i + \frac{z^2 - \overline{z}^2}{2} - \frac{z+\overline{z}}{2}i + ci \\ &= z^2 - zi + ci. \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ は任意定数}) \quad \square \end{aligned}$$