フーリエ解析　第 9 回演習

第 9 回演習問題：テキスト p.63 問題 [A]4.(1)(3) です.

(ヒント) このプリント例題 1.,2 と裏面の (ヒント) を参考にせよ.

提出期限と場所：2 月 3 日 (金) に行う補講の授業開始前に教室の教壇の上に提出して下さい.

(基本事項)　$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とおくとテキスト p.43 の囲み公式 (1)(2) より

$$\boxed{\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0)}, \qquad \boxed{\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)}.$$

例題 1. 関数 $y = y(t)$ について，次の線形微分方程式を [　] 内の初期条件の下で解け：

$$y'' + 2y' + y = \sin t \ \cdots ① \qquad [\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1\ ] \ \cdots ②$$

(解答例) (1) $\mathcal{L}[y] = Y(s) \ \cdots ③$ とおくと（テキスト p.43 の囲み公式 (1)(2) と）初期条件 ② より

$$\mathcal{L}[y'] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 \ \cdots ④,$$
$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s\cdot 1 - (-1) = s^2Y(s) - s + 1 \ \cdots ⑤$$

① の両辺をラプラス変換 $\mathcal{L}$ すると

$$\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\sin t] \ \cdots ⑥$$

上式 ⑥で ③④⑤と（テキスト p.42 ラプラス変換表より）

$$(s^2Y(s) - s + 1) + 2(sY(s) - 1) + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}, \qquad \therefore\ (s^2 + 2s + 1)Y(s) = s + 1 + \frac{1}{s^2+1}$$
$$\therefore\ Y(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^2(s^2+1)} = \underline{\frac{1}{s+1} + \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{(s+1)^2(s^2+1)}}} \ \cdots ⑦$$

⑦ の右辺第 2 項 (波線部分) を部分分数分解する:

$$\underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{(s+1)^2(s^2+1)}} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \qquad (A, B, C, D：\text{定数})$$

として両辺に $(s+1)^2(s^2+1)$ を掛けて

$$1 = A(s+1)(s^2+1) + B(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+2s+1),$$
$$\therefore\ 1 = (A+C)s^3 + (A+B+2C+D)s^2 + (A+C+2D)s + A + B + D.$$

両辺比較して　$A + C = 0,\ \ A + B + 2C + D = 0,\ \ A + C + 2D = 0,\ \ A + B + D = 1$

この連立 1 次方程式を解いて $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = 0$ より

$$\underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{(s+1)^2(s^2+1)}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1} \ \cdots ⑧$$

⑧を ⑦に代入して

$$Y(s) = \underline{\frac{1}{s+1} + \left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right\}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1} \ \cdots ⑦'$$

⑦′ の両辺をラプラス逆変換 $\mathcal{L}^{-1}$ すると（テキスト p.46 ラプラス逆変換表より）

$$\begin{aligned} y = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] &= \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] \\ &= \frac{3}{2}e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{1}{2}e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1^2}\right] \\ &= \frac{3}{2}e^{-t}1 + \frac{1}{2}e^{-t}t - \frac{1}{2}\cos t = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}\cos t \qquad \square \end{aligned}$$

例題 2. は裏面にあります

例題 2[p.50 例題 1(2)]. 関数 $y=y(t)$ について，次の線形微分方程式を [ ] 内の初期条件の下で解け：

$$y''-4y=\sin t\ \cdots ①\qquad [\,y(0)=0,\ y'(0)=1\,]\cdots ②$$

(解答例) $\mathcal{L}[y]=Y(s)\ \cdots ③$ とおくと p.43 の囲み公式 (2) と初期条件 ②より

$$\mathcal{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-s\cdot 0-1=s^2Y-1\ \cdots ④$$

但し，$Y=Y(s)$．与式 ①の両辺をラプラス変換 $\mathcal{L}$ すると

$$\mathcal{L}[y'']-4\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[\sin t]\ \cdots ⑤$$

上式 ⑤で ③④と p.42 ラプラス変換表より

$$(s^2Y-1)-4Y=\frac{1}{s^2+1},\quad \therefore (s^2-4)Y=1+\frac{1}{s^2+1},\quad \therefore Y=\underline{\frac{1}{s^2-4}+\frac{1}{(s^2-4)(s^2+1)}}\ \cdots ⑥$$

ここで ⑥の右辺第 2 項 (波線部分) を部分分数分解する:

$$\frac{1}{(s^2-4)(s^2+1)}=\frac{A}{s^2-4}+\frac{B}{s^2+1}\quad (A,B：定数) として両辺に (s^2-4)(s^2+1) を掛けて$$

$$1=A(s^2+1)+B(s^2-4),\qquad \therefore 1=(A+B)s^2+A-4B,\qquad \therefore A+B=0,\ A-4B=1$$

これを解いて $A=\frac{1}{5},\ B=\frac{-1}{5}$ より

$$\frac{1}{(s^2-4)(s^2+1)}=\frac{1}{5}(\frac{1}{s^2-4})-\frac{1}{5}(\frac{1}{s^2+1})\ \cdots ⑦$$

⑦を ⑥に代入して

$$Y=\underline{\frac{1}{s^2-4}+\left\{\frac{1}{5}(\frac{1}{s^2-4})-\frac{1}{5}(\frac{1}{s^2+1})\right\}}=\frac{6}{5}(\frac{1}{s^2-4})-\frac{1}{5}(\frac{1}{s^2+1})=\frac{3}{5}(\frac{2}{s^2-2^2})-\frac{1}{5}(\frac{1}{s^2+1^2})\ \cdots ⑥'$$

⑥′ の両辺をラプラス逆変換 $\mathcal{L}^{-1}$ すると

$$\begin{aligned}y=\mathcal{L}^{-1}[Y]&=\frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2-2^2}\right]-\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1^2}\right]=\frac{3}{5}\sinh 2t-\frac{1}{5}\sin t\\&=\frac{3}{5}(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2})-\frac{1}{5}\sin t=\frac{3}{10}(e^{2t}-e^{-2t})-\frac{1}{5}\sin t\qquad\square\end{aligned}$$

(ヒント) • p.63 問題 [A]4.(1) では, 初期条件が $[\,y(0)=0,\ y'(0)=0\,]$ なので

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y']&=sY-y(0)=sY-0=sY,\\ \mathcal{L}[y'']&=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-s\cdot 0-0=s^2Y\end{aligned}$$

また次の部分分数分解を用います：

$$\frac{1}{(s+2)(s^2+1)}=\frac{A}{s+2}+\frac{Bs+C}{s^2+1}\qquad (A,B,C：定数)$$

• p.63 問題 [A]4.(3) では, 初期条件が $[\,y(0)=1,\ y'(0)=1\,]$ なので

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y']&=sY-y(0)=sY-1,\\ \mathcal{L}[y'']&=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-s\cdot 1-1=s^2Y-s-1\end{aligned}$$

また次の部分分数分解を用います：

$$\frac{1}{(s+2)(s-1)^2}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{(s-1)^2}\qquad (A,B,C：定数)$$