

フーリエ解析 第8回演習

第8回演習問題：テキスト p.42 問題 1. と次の追加問題です．

(ヒント) テキスト p.42 のラプラス変換表 と下の例題を参照せよ．p.42 問題 1.(5) は三角関数の加法定理より  $\sin(t - \frac{\pi}{3}) = \sin t \cos \frac{\pi}{3} - \cos t \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t$  としてラプラス変換する．

追加問題. 次の関数のラプラス変換を求めよ．

$$(1) \quad 3 - 2t + 4t^2 - e^{2t} + te^{2t} - 3t^2 e^{-3t} + 2t^3 e^t \qquad (2) \quad 3 \sin 2t - \cos 3t + 2e^{2t} \sin t - 4e^{-t} \cos 2t$$

提出期限と場所：年明け初回の 1 月 13 日 (金) 授業開始前に教室の教壇の上に提出して下さい．

例題. 次の関数のラプラス変換を求めよ．

$$(1) \quad 2 + 3t - 2t^2 + 4e^{2t} - 2te^{2t} + t^2 e^{-t} \qquad (2) \quad 4 \sin 3t - 3 \cos 2t - 5e^t \sin 2t + 2e^{2t} \cos 3t$$

(解答例) テキスト p.42 のラプラス変換表 を用いる．

$$(1) \quad f(t) = 2 + 3t - 2t^2 + 4e^{2t} - 2te^{2t} + t^2 e^{-t} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= 2\mathcal{L}[1] + 3\mathcal{L}[t] - 2\mathcal{L}[t^2] + 4\mathcal{L}[e^{2t}] - 2\mathcal{L}[te^{2t}] + \mathcal{L}[t^2 e^{-t}] \\ &= 2\left(\frac{1}{s}\right) + 3\left(\frac{1}{s^2}\right) - 2\left(\frac{2!}{s^3}\right) + 4\left(\frac{1}{s-2}\right) - 2\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right) + \frac{2!}{(s-(-1))^3} \\ &= \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2} - \frac{4}{s^3} + \frac{4}{s-2} - \frac{2}{(s-2)^2} + \frac{2}{(s+1)^3} \end{aligned}$$

$$(2) \quad f(t) = 4 \sin 3t - 3 \cos 2t - 5e^t \sin 2t + 2e^{2t} \cos 3t \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= 4\mathcal{L}[\sin 3t] - 3\mathcal{L}[\cos 2t] - 5\mathcal{L}[e^t \sin 2t] + 2\mathcal{L}[e^{2t} \cos 3t] \\ &= 4\left(\frac{3}{s^2 + 3^2}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2 + 2^2}\right) - 5\left(\frac{2}{(s-1)^2 + 2^2}\right) + 2\left(\frac{s-2}{(s-2)^2 + 3^2}\right) \\ &= \frac{12}{s^2 + 3^2} - \frac{3s}{s^2 + 2^2} - \frac{10}{(s-1)^2 + 2^2} + \frac{2(s-2)}{(s-2)^2 + 3^2} \end{aligned}$$