フーリエ解析　第 7 回演習

第 7 回演習問題：次の追加問題を行え.

追加問題. 関数

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & (-1 \leqq x < 0) \\ 1-x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (x < -1,\ 1 < x) \end{cases}$$

について, (1) $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\alpha)$ を求めよ. (2) $f(x)$ のフーリエ積分を求めよ.

(ヒント＆答) 下の例題を参考にせよ. また, オイラーの公式 $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ より $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha,\quad e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha$ となる事を用いる. 最終結果は

$$(1)\quad F(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\right) & (\alpha \neq 0) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & (\alpha = 0) \end{cases} \qquad (2)\quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\right)e^{i\alpha x}\,d\alpha$$

提出期限と場所：12 月 9 日 (金) 授業開始前に教室の教壇の上に提出して下さい.

例題. 関数

$$f(x) = \begin{cases} -x & (-1 \leqq x < 0) \\ x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (x < -1,\ 1 < x) \end{cases}$$

について, (1) $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\alpha)$ を求めよ. (2) $f(x)$ のフーリエ積分を求めよ.

(解答例) (1) $x < -1$ と $1 < x$ において $f(x) = 0$, $-1 \leqq x < 0$ において $f(x) = -x$ であり, $0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x) = x$ なので $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\alpha)$ は

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-1}^{0}(-x)\cdot e^{-i\alpha x}\,dx + \int_{0}^{1} x\cdot e^{-i\alpha x}\,dx\right\} \cdots ①$$

$\alpha \neq 0$ の時, ① と $\int e^{-i\alpha x}\,dx = \frac{1}{-i\alpha}e^{-i\alpha x} + C$ より部分積分法を用いて

$$\begin{aligned}
F(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[(-x)\left(\frac{e^{-i\alpha x}}{-i\alpha}\right)\right]_{x=-1}^{x=0} - \int_{-1}^{0}(-x)'\left(\frac{e^{-i\alpha x}}{-i\alpha}\right)dx + \left[x\left(\frac{e^{-i\alpha x}}{-i\alpha}\right)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_{0}^{1}x'\left(\frac{e^{-i\alpha x}}{-i\alpha}\right)dx\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left(0 - \frac{e^{i\alpha}}{-i\alpha}\right) + \frac{1}{-i\alpha}\int_{-1}^{0}e^{-i\alpha x}dx + \left(\frac{e^{-i\alpha}}{-i\alpha} - 0\right) + \frac{1}{i\alpha}\int_{0}^{1}e^{-i\alpha x}dx\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha} - \frac{1}{i\alpha}\left[\frac{e^{-i\alpha x}}{-i\alpha}\right]_{x=-1}^{x=0} + \frac{1}{i\alpha}\left[\frac{e^{-i\alpha x}}{-i\alpha}\right]_{x=0}^{x=1}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha} - \frac{1 - e^{i\alpha}}{\alpha^2} + \frac{e^{-i\alpha} - 1}{\alpha^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha} + \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} - 2}{\alpha^2}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2i\sin\alpha}{i\alpha} + \frac{2\cos\alpha - 2}{\alpha^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}\right)
\end{aligned}$$

$\alpha = 0$ の時, ① より

$$\begin{aligned}
F(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-1}^{0}(-x)\cdot e^{0}\,dx + \int_{0}^{1}x\cdot e^{0}\,dx\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-1}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{1}x\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{-\frac{0^2 - (-1)^2}{2} + \frac{1^2 - 0^2}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

まとめて

$$F(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}\right) & (\alpha \neq 0) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & (\alpha = 0) \end{cases}$$

(2) $f(x)$ のフーリエ積分は, (1) の結果を代入して

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}\right)e^{i\alpha x}\,d\alpha \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\cos\alpha - 1}{\alpha^2}\right)e^{i\alpha x}\,d\alpha \qquad \square
\end{aligned}$$

複素フーリエ級数からフーリエ積分へ

周期 $2L$ の関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数とは次式の事である：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}\,, \qquad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\,dx \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

注意. オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて変形すれば，複素フーリエ級数と普通のフーリエ級数 (p.12 の囲み (11) 式) は同じ式である事が分かる．まとめると

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\,dx)e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

となる．ここで，$L \to \infty$ の極限を考察する．

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{L\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\,dx)e^{i\frac{n\pi x}{L}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\underline{\lim_{L\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}}\left(\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\,dx\right)e^{i\frac{n\pi x}{L}}\,\underline{\frac{\pi}{L}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\underline{\lim_{L\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}}\left(\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\Delta\alpha x}\,dx\right)e^{in\Delta\alpha x}\,\underline{\Delta\alpha} \qquad (\,\frac{\pi}{L} = \Delta\alpha\,) \\
&= \frac{1}{2\pi}\underline{\int_{-\infty}^{\infty}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\,dx\right)e^{i\alpha x}\,\underline{d\alpha} \qquad (\,\Delta\alpha \to d\alpha, \quad n\Delta\alpha \to \alpha\,) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\,dx\right)e^{i\alpha x}\,d\alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha \qquad (\,F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\,dx\,)
\end{aligned}$$

$L \to \infty$ の極限を考える事は，周期が無限大の場合，即ち，周期が存在しない場合を考える事となる．従って，$f(x)$ に周期が存在しない場合に次式が成立する事になる：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha \;\cdots\circledast, \qquad F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\,dx.$$

$\circledast$を $f(x)$ のフーリエ積分 (Fourier integral)，$F(\alpha)$ を $f(x)$ のフーリエ変換 (Fourier transform) と言う．上の式変形に正当性を与えるには, $f(x)$ が絶対可積分性を持てば十分である事が知られている：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty.$$

<u>第 7 回演習問題は裏面にあります</u>