フーリエ解析　第 6 回演習

第 6 回演習問題：次の追加問題を行って下さい.

追加問題. 関数 $y = y(x, t)$ についての波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq 2,\ t \geqq 0)$$

を次の境界条件，初期条件の下で解け.

$$\text{境界条件} \qquad y(0,t) = y(2,t) = 0 \qquad (t \geqq 0)$$

$$\text{初期条件} \qquad y(x,0) = \begin{cases} x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 2-x & (1 < x \leqq 2) \end{cases} \cdots ③, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \cdots ④$$

(ヒント＆答) 下の例題を参考にせよ．最終結果は次の様になります：

$$y = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\cos\{(2n-1)\pi t\}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

提出期限と場所：12 月 2 日 (金) 授業開始前に教室の教壇の上に提出して下さい.

例題. 関数 $y = y(x, t)$ についての波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdots ① \qquad (0 \leqq x \leqq 4,\ t \geqq 0)$$

を次の境界条件，初期条件の下で解け.

$$\text{境界条件} \qquad y(0,t) = y(4,t) = 0 \cdots ② \qquad (t \geqq 0)$$

$$\text{初期条件} \qquad y(x,0) = \begin{cases} x & (0 \leqq x \leqq 2) \\ 4-x & (2 < x \leqq 4) \end{cases} \cdots ③, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \cdots ④$$

(解答例) まず $y = T(t)X(x)$ の形の ①②の一般解を求める．$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T''(t)X(x)$，$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T(t)X''(x)$ より

$$① \iff T''(t)X(x) = 9T(t)X''(x) \iff \frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \qquad (\lambda：\text{定数})$$

$$\iff T'' + 9\lambda T = 0 \cdots ⑤, \qquad X'' + \lambda X = 0 \cdots ⑥$$

境界条件 ②を調べる．$y(0,t) = T(t)X(0) = 0$．ここで $T(t) \equiv 0$ とすると $y = T(t)X(x) \equiv 0$ (自明解) となるので $T(t) \not\equiv 0$ としてよく $X(0) = 0$ を得る．また $y(4,t) = T(t)X(4) = 0$ より $X(4) = 0$．以上より $X = X(x)$ は $X'' + \lambda X = 0 \cdots ⑥$と $X(0) = X(4) = 0$ を満たすので（第 5 回演習の例題 1. より）

$$\text{固有値} \quad \lambda = \left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \cdots), \qquad \text{固有関数} \quad \underline{X = B\sin\frac{n\pi x}{4}} \quad (B \neq 0)$$

を得る．次に $T = T(t)$ を求める．$\lambda = (\frac{n\pi}{4})^2$ と ⑤より $T'' + \frac{9n^2\pi^2}{16}T = 0$．この特性方程式 $s^2 + \frac{9n^2\pi^2}{16} = 0$ の解は

$$s = \pm\sqrt{\frac{-9n^2\pi^2}{16}} = \pm\sqrt{-1}\frac{3n\pi}{4} = \pm i\frac{3n\pi}{4}$$

より一般解は

$$\underline{T = C\cos(\frac{3n\pi t}{4}) + D\sin(\frac{3n\pi t}{4})} \qquad (C, D：\text{任意定数}).$$

以上により $y = T(t)X(x)$ の形の ①②の一般解は

$$\underline{y = TX = \{E\cos(\frac{3n\pi t}{4}) + F\sin(\frac{3n\pi t}{4})\}\sin\frac{n\pi x}{4}} \cdots ⑦ \qquad (E = CB, F = DB：\text{任意定数},\ n = 1, 2, \cdots)$$

次ページに続く

関数 $y=\{E\cos(\frac{3n\pi t}{4})+F\sin(\frac{3n\pi t}{4})\}\sin\frac{n\pi x}{4}\ \cdots$ ⑦を t で偏微分すると

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\{-E\frac{3n\pi}{4}\sin(\frac{3n\pi t}{4})+F\frac{3n\pi}{4}\cos(\frac{3n\pi t}{4})\}\sin\frac{n\pi x}{4}$$

$t=0$ を代入すると $\sin 0=0,\ \cos 0=1$ より初期条件 $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0)=0\ \cdots$ ④は

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=F\frac{3n\pi}{4}\sin\frac{n\pi x}{4}=0 \qquad \therefore\ F=0$$

⑦に $F=0$ を代入して，①②④の解

$$\underline{y=E\cos(\frac{3n\pi t}{4})\sin\frac{n\pi x}{4}}\ \cdots ⑧$$

を得る．⑧を $n=1,2,\cdots$ について重ね合わせて

$$\underline{y=y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\cos(\frac{3n\pi t}{4})\sin\frac{n\pi x}{4}}\ \cdots ⑨$$

とおくと ①②④を満たす.

最後に関数 ⑨で初期条件 ③を調べる．⑨に $t=0$ を代入すると $\cos 0=1$ より

$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin\frac{n\pi x}{4}$$

よって，E_n は $y(x,0)=\begin{cases}x & (0\leqq x\leqq 2)\\ 4-x & (2<x\leqq 4)\end{cases}\ \cdots$ ③のフーリエ正弦係数であるから（テキスト p.16 公式 (14) で $b_n=E_n,\ L=4,\ f(x)=y(x,0)$ として）

$$\begin{aligned}
E_n&=\frac{2}{4}\int_0^4 y(x,0)\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx=\frac{1}{2}\left\{\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx+\int_2^4(4-x)\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left\{\left[x(\frac{-4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4})\right]_0^2-\int_0^2 x'(\frac{-4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4})\,dx\right.\\
&\qquad\left.+\left[(4-x)(\frac{-4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4})\right]_2^4-\int_2^4(4-x)'(\frac{-4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4})\,dx\right\}\\
&=\frac{-4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx+\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi}\int_2^4\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx\\
&=\frac{2}{n\pi}\left[\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\right]_0^2-\frac{2}{n\pi}\left[\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\right]_2^4=\frac{8}{n^2\pi^2}\{(\sin\frac{n\pi}{2}-\sin 0)-(\sin n\pi-\sin\frac{n\pi}{2})\}\\
&=\frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{16}{n^2\pi^2}\times\begin{cases}(-1)^{k-1} & (n=2k-1)\\ 0 & (n=2k)\end{cases}=\begin{cases}\frac{16(-1)^{k-1}}{n^2\pi^2} & (n=2k-1)\\ 0 & (n=2k)\end{cases}
\end{aligned}$$

よって，$E_{2k-1}=\dfrac{16(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2\pi^2}$，$E_{2k}=0 \quad (k=1,2,\cdots)$. k を改めて n とおいて

$$E_{2n-1}=\frac{16(-1)^{n-1}}{\pi^2(2n-1)^2},\qquad E_{2n}=0\qquad(n=1,2,\cdots)$$

これらを ⑨に代入して

$$\begin{aligned}
y=y(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^{n-1}}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\left\{\frac{3(2n-1)\pi t}{4}\right\}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{4}\\
&=\underline{\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\cos\left\{\frac{3(2n-1)\pi t}{4}\right\}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{4}}\quad\square
\end{aligned}$$

注意. 上の解答で次式を用いています．自然数 $n=1,2,\cdots$ に対して，

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^{k-1} & (n=2k-1)\\ 0 & (n=2k)\end{cases}$$