フーリエ解析　第5回演習

第5回演習問題：テキスト p.36 問題 6(1)(2) のどちらか一つを行って下さい．

(ヒント) 次の例題 1,2 を参照せよ．また次を用いる．

$$\cos\sqrt{\lambda}L = 0 \implies \sqrt{\lambda}L = \frac{(2n-1)\pi}{2} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

提出期限と場所：11 月 18 日 (金) 授業開始前に教室の教壇の上に提出して下さい．

次の例題 1. は <u>両端が固定された弦の振動</u> の波動方程式を解く際に必要な重要問題です．

例題 1. y は x の関数 $y = y(x)$ とし，$L > 0$ は定数とする．次の微分方程式

$$y'' + \lambda y = 0 \ \cdots\cdots ① \qquad (\lambda：実数定数)$$

の $\boxed{\text{境界条件：} y(0) = y(L) = 0}$ に対する固有値 λ，固有関数 $y \not\equiv 0$ を求めよ．

(解答例) ①は定数係数 2 階同次線形微分方程式であり，特性方程式 $t^2 + \lambda = 0$ の解は $t = \pm\sqrt{-\lambda}$ より，①の一般解は

(a) $\lambda > 0$ の場合, $t = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$ は虚数解なので，　$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$

(b) $\lambda < 0$ の場合, $t = \pm\sqrt{-\lambda}$ は 2 つの実数解なので，　$y = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

(c) $\lambda = 0$ の場合, $t = 0$：重解なので，　$y = Ae^{0x} + Bxe^{0x} = A + Bx$.

ここで，A, B：任意定数．

(b) $\lambda < 0$ の場合．境界条件 $y(0) = 0$ より $y(0) = Ae^0 + Be^0 = A + B = 0$．$\therefore B = -A$．更に境界条件 $y(L) = 0$ より

$$y(L) = Ae^{\sqrt{-\lambda}L} + Be^{-\sqrt{-\lambda}L} = Ae^{\sqrt{-\lambda}L} - Ae^{-\sqrt{-\lambda}L} = A(e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}) = 0$$

ここで，$(e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}) \neq 0$ より $A = 0$, $B = -A = 0$．$\therefore y = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x} \equiv 0$．よって，この場合は自明解 $y \equiv 0$ のみで $\lambda < 0$ は固有値でない．(固有関数 $y \not\equiv 0$ は存在しない)

(c) $\lambda = 0$ の場合．境界条件 $y(0) = 0$ より $y(0) = A + B0 = A = 0$．$\therefore y = Bx$．更に境界条件 $y(L) = 0$ より $y(L) = BL = 0$．$L > 0$ より $B = 0$．$\therefore y = A + Bx \equiv 0$．よって，この場合は自明解 $y \equiv 0$ のみで $\lambda = 0$ は固有値でない．(固有関数 $y \not\equiv 0$ は存在しない)

(a) $\lambda > 0$ の場合．境界条件 $y(0) = 0$ より $y(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A = 0$.
$\therefore y = B\sin\sqrt{\lambda}x$．更に境界条件 $y(L) = 0$ より $y(L) = B\sin\sqrt{\lambda}L = 0$．ここで $B = 0$ であれば $y = B\sin\sqrt{\lambda}x \equiv 0$ (自明解)．よって，$B \neq 0$ なので，$\sin\sqrt{\lambda}L = 0$ となり

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi \quad (n = 1, 2, \cdots), \qquad \therefore \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \qquad \therefore \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

以上より

$$固有値\ \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \cdots), \qquad 固有関数\ y = B\sin\sqrt{\lambda}x = B\sin\frac{n\pi x}{L} \quad (B \neq 0) \quad \square$$

<u>**例題 2.** は裏面に書きます</u>

次の例題 2. は 両端が開かれた筒 (笛) の中の空気振動 の波動方程式を解く際に必要な問題です.

例題 2. y は x の関数 $y = y(x)$ とし，$L > 0$ は定数とする．次の微分方程式

$$y'' + \lambda y = 0 \ \cdots\cdots ① \qquad (\lambda：実数定数)$$

の $\boxed{境界条件：y'(0) = y'(L) = 0}$ に対する固有値 λ，固有関数 $y \not\equiv 0$ を求めよ．

(解答例) ①は定数係数 2 階同次線形微分方程式であり，特性方程式 $t^2 + \lambda = 0$ の解は $t = \pm\sqrt{-\lambda}$ より，①の一般解は

(a) $\lambda > 0$ の場合, $t = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$ は虚数解なので，　$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$

(b) $\lambda < 0$ の場合, $t = \pm\sqrt{-\lambda}$ は 2 つの実数解なので，　$y = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

(c) $\lambda = 0$ の場合, $t = 0$：重解なので，　$y = Ae^{0x} + Bxe^{0x} = A + Bx.$

ここで，A, B：任意定数.

(b) $\lambda < 0$ の場合．$y' = A\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} - B\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ と境界条件 $y'(0) = 0$ より $y'(0) = A\sqrt{-\lambda} - B\sqrt{-\lambda} = \sqrt{-\lambda}(A - B) = 0$．ここで，$\sqrt{-\lambda} > 0$ なので $A - B = 0$．$\therefore B = A$．更に境界条件 $y'(L) = 0$ より $y'(L) = A\sqrt{-\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}) = 0$．ここで, $\sqrt{-\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}) \neq 0$ より $A = 0$ となり $B = A = 0$．$\therefore y = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x} \equiv 0$．よって，この場合は自明解 $y \equiv 0$ のみで $\lambda < 0$ は固有値でない．(固有関数 $y \not\equiv 0$ は存在しない)

(c) $\lambda = 0$ の場合．$y' = B$ と境界条件 $y'(0) = 0$ より $y'(0) = B = 0$．$\therefore y = A$ であり $y' = 0$ より境界条件 $y'(L) = 0$ も満たす．よって定数関数 $y = A$ $(A \neq 0)$ は固有値 $\lambda = 0$ の固有関数である．

(a) $\lambda > 0$ の場合．$y' = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$ と境界条件 $y'(0) = 0$ より $y'(0) = B\sqrt{\lambda} = 0$．ここで，$\sqrt{\lambda} > 0$ なので $B = 0$．$\therefore y = A\cos\sqrt{\lambda}x$，$y' = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x$．更に境界条件 $y'(L) = 0$ より $y'(L) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}L = 0$．ここで $A = 0$ であれば $y = A\cos\sqrt{\lambda}x \equiv 0$ (自明解)．よって，$A \neq 0$ なので，$\sin\sqrt{\lambda}L = 0$ となり

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi \quad (n = 1, 2, \cdots), \qquad \therefore \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \qquad \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

以上より，(a) $\lambda > 0$ の場合

$$固有値\ \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \cdots), \qquad 固有関数\ y = A\cos\sqrt{\lambda}x = A\cos\frac{n\pi x}{L} \quad (A \neq 0)$$

(a) $\lambda > 0$ の場合，(c) $\lambda = 0$ の場合を合わせて

$$固有値\ \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \qquad 固有関数\ y = A\cos\frac{n\pi x}{L} \quad (A \neq 0) \quad \square$$

注意. 上で $n = 0$ の時，固有値 $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = 0$，固有関数 $y = A\cos\frac{n\pi x}{L} = A\cos 0 = A \quad (A \neq 0)$.