フーリエ解析　第 4 回演習

第 4 回演習問題：下の追加問題とテキスト p.22 問題 4 です.
(ヒント) 追加問題は下の例題 1. を参考にせよ．p.22 問題 4 は偶関数であるか奇関数であるかを考えて p.16 の囲み公式を利用して計算せよ (このプリントの裏面の例題 2. を参考にせよ)

注意. p.22 問題 4 のテキストの答え (p.81) には誤りがあります. 正解は： $f(x) = \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{4}$

提出期限と場所：11 月 11 日 (金) 授業開始前に教室の教壇の上に提出して下さい.

追加問題. 次の周期 4 の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-2 \leqq x < 0) \\ 2 - x & (0 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$$

(答) 最終結果は： $f(x) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2} + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right\}$

例題 1. 次の周期 4 の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-2 \leqq x < 0) \\ x & (0 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$$

(解答例) 周期 $2L = 4$ より半周期 $L = 2$. (テキスト p.12 の囲み公式 (11) を用いて)

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx\right\} = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{4}{4} = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0} 0\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{\left[x(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 - \int_0^2 x'(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2})\,dx\right\}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin n\pi - \frac{1}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = 0 - \frac{1}{n\pi}\left[\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - \cos 0)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\{(-1)^n - 1\} = \frac{2}{n^2\pi^2}\times\begin{cases} -2 & (n = 2k-1) \\ 0 & (n = 2k) \end{cases} = \begin{cases} \frac{-4}{n^2\pi^2} & (n = 2k-1) \\ 0 & (n = 2k)\ , \end{cases}$$

これより　$a_{2k-1} = \dfrac{-4}{(2k-1)^2\pi^2}, \qquad a_{2k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots)$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-2}^{0} 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{\left[x(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 - \int_0^2 x'(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2})\,dx\right\}$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{-2}{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n^2\pi^2}(\sin n\pi - \sin 0) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n^2\pi^2}(0 - 0) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

以上より $f(x)$ のフーリエ級数は　($a_{2n} = 0$ に注意して)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{2} + b_n\sin\frac{n\pi x}{2}) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2} + b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2} + \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\} \qquad \square$$

例題 2. は裏面にあります

例題 2. 次の周期 6 の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$(1)\quad f(x)=\begin{cases}3+x & (-3\leqq x<0)\\ 3-x & (0\leqq x\leqq 3)\end{cases}\qquad (2)\quad f(x)=\begin{cases}3+x & (-3\leqq x<0)\\ 0 & (x=0)\\ -3+x & (0<x\leqq 3)\end{cases}$$

(解答例) (1) 周期 $2L=6$ より半周期 $L=3$. $y=f(x)$ のグラフは, y 軸に関して線対称なので偶関数であるから $b_n=0$ である. a_0 と a_n は (テキスト p.16 の囲み公式 (13) を用いて)

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^3(3-x)\,dx=\frac{2}{3}\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\frac{2}{3}(9-\frac{9}{2})=3,\\
a_n&=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^3(3-x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\\
&=\frac{2}{3}\left\{\left[(3-x)(\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3})\right]_0^3-\int_0^3(3-x)'(\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3})\,dx\right\}\\
&=\frac{2}{3}\left\{(0-0)+\frac{3}{n\pi}\int_0^3\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right\}=\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3\\
&=-\frac{6}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-\cos 0)=-\frac{6}{n^2\pi^2}\{(-1)^n-1\}\\
&=-\frac{6}{n^2\pi^2}\times\begin{cases}-2 & (n=2k-1)\\ 0 & (n=2k)\end{cases}=\begin{cases}\frac{12}{n^2\pi^2} & (n=2k-1)\\ 0 & (n=2k)\end{cases},\\
\therefore\ a_{2k-1}&=\frac{12}{(2k-1)^2\pi^2},\quad a_{2k}=0\quad (k=1,2,\cdots).
\end{aligned}$$

k を改めて n とおいて, $a_{2n-1}=\frac{12}{(2n-1)^2\pi^2}$, $a_{2n}=0$. 以上より $f(x)$ のフーリエ級数は ($b_n=0$ に注意して)

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{L}=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}\\
&=\frac{3}{2}+\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}\qquad\square
\end{aligned}$$

(2) 周期 $2L=6$ より半周期 $L=3$. $y=f(x)$ のグラフは, 原点に関して点対称なので奇関数であるから $a_0=a_n=0$ である. b_n は (テキスト p.16 の囲み公式 (14) を用いて)

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^3(-3+x)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\\
&=\frac{2}{3}\left\{\left[(-3+x)(\frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3})\right]_0^3-\int_0^3(-3+x)'(\frac{-3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3})\,dx\right\}\\
&=\frac{2}{3}\left\{(0-\frac{9}{n\pi}\cos 0)+\frac{3}{n\pi}\int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\right\}=\frac{-6}{n\pi}+\frac{2}{n\pi}\left[\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right]_0^3\\
&=\frac{-6}{n\pi}+\frac{6}{n^2\pi^2}(\sin n\pi-\sin 0)=\frac{-6}{n\pi}+\frac{6}{n^2\pi^2}(0-0)=\frac{-6}{n\pi}
\end{aligned}$$

以上より $f(x)$ のフーリエ級数は ($a_0=a_n=0$ に注意して)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}=\frac{-6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}\qquad\square$$