フーリエ解析　第3回演習

第3回演習問題：テキスト p.22 問題2です．答えに至る計算過程や理由を必ず記入する事．

提出期限と場所：11月4日(金) 授業開始前に教室の教壇の上に提出して下さい．

ヒント：$f(x) = |x| \quad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を場合分けして表すと

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & (-\pi \leqq x < 0) \\ x & (0 \leqq x \leqq \pi) \end{cases}$$

p.22 問題2は「$f(x)$ を (周期 2π の関数と考えて) フーリエ級数を求めよ」と言う事である．下の例題 (テキスト p.6 例題 2.) を参考にせよ．

例題 (テキスト p.6 例題 2). 周期 2π の次の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & (-\pi \leqq x < 0) \\ \pi - x & (0 \leqq x \leqq \pi) \end{cases}$$

(解答例) $y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して線対称なので偶関数である．従って, $b_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 残りのフーリエ係数 a_0, a_n $(n = 1, 2, \cdots)$ はテキスト p.5 の囲み (9) 式を用いれば良い． 注意：下は 周期 2π の偶関数 の場合の計算法です．そうでない場合は適用出来ません！

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}) = \pi, \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[(\pi - x)(\frac{1}{n}\sin nx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi (\pi - x)'(\frac{1}{n}\sin nx)\,dx\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\{0 + \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx\,dx\} = \frac{2}{\pi n}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^\pi \\
&= \frac{-2}{\pi n^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{-2}{\pi n^2}\{(-1)^n - 1\} \\
&= \frac{-2}{\pi n^2} \times \begin{cases} -2 & (n = 2k-1) \\ 0 & (n = 2k) \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2} & (n = 2k-1) \\ 0 & (n = 2k) \end{cases}
\end{aligned}$$

$\therefore\ a_{2k-1} = \dfrac{4}{\pi(2k-1)^2},\ a_{2k} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots).$

k を改めて n として $a_{2n-1} = \dfrac{4}{\pi(2n-1)^2},\ a_{2n} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$. よって, $f(x)$ のフーリエ級数は

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x \qquad (a_{2n} = 0,\ b_n = 0) \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x = \underline{\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x} \qquad \square
\end{aligned}$$