

フーリエ解析 第2回演習

第2回演習問題：次の追加問題です。(ヒント) 下の例題を参考にせよ。

提出期限と場所：10月28日(金)の授業開始前に教室の教壇の上に提出して下さい。

追加問題. 次の(1)(2)(3)の関数 $f(x)$ のグラフを描け. また, それぞれについて, 偶関数であるか, 奇関数であるか, どちらでもないかを選んで答えよ. 更に, どちらでもない場合は偶関数と奇関数の和に表せ.

$$(1) f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} -x - 4 & (-4 \leq x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ 4 - x & (0 < x \leq 4). \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0), \\ x & (0 \leq x \leq \pi). \end{cases}$$

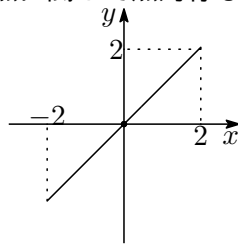
例題. 次の(1)(2)(3)の関数 $f(x)$ のグラフを描け. また, それぞれについて, 偶関数であるか, 奇関数であるか, どちらでもないかを選んで答えよ. 更に, どちらでもない場合は偶関数と奇関数の和に表せ.

$$(1) f(x) = x \quad (-2 \leq x \leq 2).$$

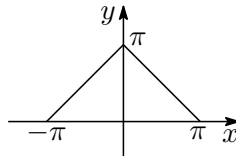
$$(2) f(x) = \begin{cases} \pi + x & (-\pi \leq x < 0), \\ \pi - x & (0 \leq x \leq \pi). \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0), \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi). \end{cases}$$

(解答例) (1) $f(x)$ のグラフが原点に関して点対称なので奇関数である.



(2) $f(x)$ のグラフが y 軸に関して線対称なので偶関数である.



(3) の解答例は裏面にあります

(3) $f(x)$ のグラフは, y 軸に関して線対称でもなく, 原点に関して点対称でもないので, $f(x)$ は (偶関数と奇関数の) どちらでもない. 次に, $f(x)$ を偶関数と奇関数の和で表す.

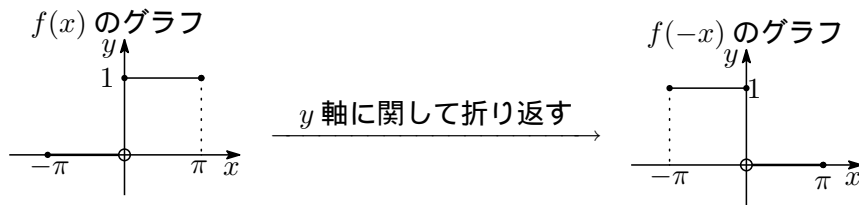
$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

とおくと $g(x)$ は偶関数, $h(x)$ は奇関数であり

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = g(x) + h(x)$$

と表される. 以下, $g(x), h(x)$ を具体的に求める.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ 1 & (0 < x \leq \pi) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ 1 & (0 < x \leq \pi) \end{cases} \dots \textcircled{1}$$



$f(-x)$ のグラフは, $f(x)$ のグラフを y 軸に関して折り返して得られるので上の右図を式で表すと

$$f(-x) = \begin{cases} 1 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ 0 & (0 < x \leq \pi) \end{cases} = \begin{cases} 1 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ 0 & (0 < x \leq \pi) \end{cases} \dots \textcircled{2}$$

$f(x)$ の偶関数部分 $g(x)$ は

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{\textcircled{1} + \textcircled{2}}{2} = \begin{cases} \frac{0+1}{2} & (-\pi \leq x < 0) \\ \frac{1+1}{2} & (x = 0) \\ \frac{1+0}{2} & (0 < x \leq \pi) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (x = 0) \\ \frac{1}{2} & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

$f(x)$ の奇関数部分 $h(x)$ は

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{\textcircled{1} - \textcircled{2}}{2} = \begin{cases} \frac{0-1}{2} & (-\pi \leq x < 0) \\ \frac{1-1}{2} & (x = 0) \\ \frac{1-0}{2} & (0 < x \leq \pi) \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & (-\pi \leq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ \frac{1}{2} & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

以上を図示すると

