フーリエ解析　第１回演習

第１回演習問題：テキスト p.22 問題 3 です．ヒント：下の例題 (テキスト p.4 例題 1.) を参考にせよ．

注意：演習用紙には，答えだけでなく，計算過程や理由を必ず記入する事．今回 (第 1 回演習) は演習問題を具体的に記述しますが，第 2 回演習からはページと問題番号しか書きませんのでテキスト (教科書) を必ず入手する事．テキスト：応用解析　矢野健太郎・石原繁　裳華房

提出期限と場所：第 4 回授業 (10 月 21 日) 開始前に教室にて回収する．(第 3 回授業 (10 月 14 日) は休講にします)

第１回演習問題 (テキスト p.22 問題 3). (周期 2π の) 次の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leqq x < 0) \\ 1 & (0 \leqq x < \pi) \end{cases}$$

例題 (テキスト p.4 例題 1). 周期 2π の次の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 0 & (x = -\pi, 0, \pi) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

(解) p.3 の囲みの公式を利用する．

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\{[-x]_{-\pi}^{0} + [x]_0^{\pi}\} = \frac{1}{\pi}\{-\pi + \pi\} = 0, \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\cos nx\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\{[-\frac{1}{n}\sin nx]_{-\pi}^{0} + [\frac{1}{n}\sin nx]_0^{\pi}\} = \frac{1}{n\pi}\{-\sin 0 + \sin(-n\pi) + \sin n\pi - \sin 0\} = 0, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\sin nx\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\{[(-1)\frac{-1}{n}\cos nx]_{-\pi}^{0} + [\frac{-1}{n}\cos nx]_0^{\pi}\} = \frac{1}{n\pi}\{\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0\} \\
&= \frac{2}{n\pi}\{1 - \cos n\pi\} = \frac{2}{n\pi}\{1 - (-1)^n\} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & (n = 2k-1) \\ 0 & (n = 2k) \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}$$

以上より，$a_0 = 0$, $a_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $b_{2k-1} = \frac{4}{(2k-1)\pi}$, $b_{2k} = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$．よって，$f(x)$ のフーリエ級数は

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1}\sin(2k-1)x + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}\sin 2kx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x
\end{aligned}$$

注意 1. 上の解答における記号 $\sim$ は,“ ほとんど全ての x について左右両辺が等しい ”と言う意味に解釈すれば良い．後で詳しく説明する．

注意 2. 上の解答で次を用いている: 自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して，

$$\sin n\pi = \sin(-n\pi) = 0, \qquad \cos n\pi = \cos(-n\pi) = (-1)^n = \begin{cases} -1 & (n = 2k-1) \\ 1 & (n = 2k) \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$