複素関数論　第 5 回演習 (10 月 29 日出題)

第 5 回演習：テキスト p.24 問題 1(1)(2)(3) の内 2 つ，p.24 問題 2(1)(2)(3) の内 2 つ．更に行った問題全てについて $f'(z)$ と $f(z)$ を z で表せ．

(ヒント) p.24 問題 1 は下の例題を参照せよ．p.24 問題 2 はコーシー・リーマンの方程式より係数 a, b, c, d の満たす条件を調べれば良い．

(基本事項) 複素関数 $w = f(z)$ が z について微分可能である時，正則であると言う．

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy)$ と表した時，$f(z)$ が正則である必要十分条件は，$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ がコーシー・リーマンの方程式 $\boxed{u_x = v_y,\, u_y = -v_x}$ を満たす事である (p.21 定理 2.1 参照)．$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が正則である時，導関数は

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x,$$

コーシー・リーマンより別の形に表せば

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = v_y - iu_y.$$

例題 (p.23 例題 2 改)．次の関数 $f(z)$ が正則関数である事を示し，$f'(z)$ を求めよ．更に $f'(z)$ と $f(z)$ を z で表せ．

$$f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$$

(解答例) $u = x^2 - y^2 - 2xy$, $v = x^2 - y^2 + 2xy$ とおくと

$$\begin{aligned} u_x &= 2x - 2y, & u_y &= -2y - 2x \\ v_x &= 2x + 2y, & v_y &= -2y + 2x \end{aligned}$$

よりコーシー・リーマンの方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を満たす．よって，$f(z)$ は正則．導関数は

$$f'(z) = u_x + iv_x = \boxed{2x - 2y + i(2x + 2y)}.$$

次に $f'(z)$ と $f(z)$ を z で表す．$z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ より $x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ であるから

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2x - 2y + i(2x + 2y) = z + \overline{z} - \frac{z - \overline{z}}{i} + i\{z + \overline{z} + \frac{z - \overline{z}}{i}\} \\ &= z + \overline{z} + i(z - \overline{z}) + i(z + \overline{z}) + z - \overline{z} = 2z + 2iz = \boxed{2(1 + i)z} \cdots ①. \end{aligned}$$

①を z について不定積分して

$$f(z) = \int f'(z)\,dz = \int 2(1 + i)z\,dz = 2(1 + i) \cdot \frac{z^2}{2} + C = (1 + i)z^2 + C \qquad (C：任意定数) \cdots ②.$$

与式 $f(z) = (x^2 - y^2 - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2xy)$ と「$z = x + iy = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$」より $f(0) = 0$ なので $\underline{C = 0}$．これを ②に代入して $\boxed{f(z) = (1 + i)z^2}$． □