

陰関数極値問題のまとめ

条件 $f(x, y) = 0$, $f_y(x, y) \neq 0$ を満たす点 (a, b) の付近では y は x の関数 $y = \varphi(x)$ と考えられる (陰関数定理). この関数 $y = \varphi(x)$ を条件 $f(x, y) = 0$ より定まる陰関数と言う.

定理. 関数 $f(x, y)$ は C^2 級とする. 条件 $f(x, y) = 0$ より定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求める問題を陰関数極値問題と言う. この問題で極値を取る候補点 (a, b) は以下の (1)(2)(3) を満たす:

$$f(x, y) = 0, \quad (1)$$

$$f_x(x, y) = 0, \quad (2)$$

$$f_y(x, y) \neq 0. \quad (3)$$

次に関数 $\Delta(x, y)$ を次式で定義する:

$$\Delta(x, y) = -\frac{f_{xx}(x, y)}{f_y(x, y)}. \quad (4)$$

(1)(2)(3) の解 (a, b) について,

$\Delta(a, b) > 0 \Rightarrow y = \varphi(x)$ は $x = a$ で極小値 $y = b$,

$\Delta(a, b) < 0 \Rightarrow y = \varphi(x)$ は $x = a$ で極大値 $y = b$.

注意. $\Delta(a, b) = 0$ の時は, この方法によっては判定できない.

(証明) $f(a, b) = 0$ を満たす点 (a, b) が, $f_y(a, b) \neq 0$ を満たすと仮定する. 陰関数定理より点 (a, b) の付近で y は x の関数 $y = \varphi(x)$ と考えられ次式が成立:

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

$x = a$ の時, $y = \varphi(a) = b$ より,

$$\varphi'(a) = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}.$$

よって, 点 (a, b) が候補点であれば $\varphi'(a) = 0$, 即ち, $f_x(a, b) = 0$ を満たす. 次に連鎖律 (教科書の

定理 34.1) と $f_{xy} = f_{yx}$ より,

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= -\frac{\left(\frac{d}{dx}f_x(x, \varphi(x))\right)f_y - f_x\left(\frac{d}{dx}f_y(x, \varphi(x))\right)}{f_y^2} \\ &= -\frac{(f_{xx}x' + f_{xy}\varphi'(x))f_y - f_x(f_{yx}x' + f_{yy}\varphi'(x))}{f_y^2} \\ &= -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}. \end{aligned}$$

が成立. ここで, $f_x(a, b) = 0$ より次式を得る:

$$\varphi''(a) = -\frac{f_{xx}(a, b)}{f_y(a, b)}.$$

従って, $\Delta(a, b) > 0$ ならば $\varphi''(a) > 0$ となり, $y = \varphi(x)$ は $x = a$ で極小値 $y = \varphi(a) = b$ を取る (教科書の定理 17.4 参照). また, $\Delta(a, b) < 0$ ならば $\varphi''(a) < 0$ となり, $y = \varphi(x)$ は $x = a$ で極大値 $y = \varphi(a) = b$ を取る.

例題 1. 条件 $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ より定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求めよ.

(解) $f = x^2 + 2xy + 2y^2 - 1$ と置く. $f_x = 2(x + y)$, $f_y = 2(x + 2y)$ より極値を取る候補点は次式を満たす:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 1 = 0 \cdots \textcircled{1},$$

$$2(x + y) = 0 \cdots \textcircled{2},$$

$$2(x + 2y) \neq 0 \cdots \textcircled{3}$$

②より $y = -x$ であり, ①に代入し整理すると, $x^2 - 1 = 0$. これより, $(x, y) = (\pm 1, \mp 1)$ を得る. この点は ③を満たし, 候補点は, $(x, y) = (\pm 1, \mp 1)$. 次に, $f_{xx} = 2$, $f_y = 2(x + 2y)$ より,

$$\Delta = -\frac{f_{xx}}{f_y} = -\frac{1}{x + 2y}.$$

ここで, $\Delta(1, -1) = 1 > 0$ より, $x = 1$ で極小値 $y = \varphi(1) = -1$ を取る. $\Delta(-1, 1) = -1 < 0$ より, $x = -1$ で極大値 $y = \varphi(-1) = 1$ を取る.

例題 2. 条件 $x^3 - 3xy + y^3 = 0$ より定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求めよ .

(解) $f = x^3 - 3xy + y^3$ と置く . $f_x = 3(x^2 - y)$, $f_y = 3(y^2 - x)$ より極値を取る候補点は次式を満たす:

$$x^3 - 3xy + y^3 = 0 \cdots \textcircled{1},$$

$$3(x^2 - y) = 0 \cdots \textcircled{2},$$

$$3(y^2 - x) \neq 0 \cdots \textcircled{3}$$

②より $y = x^2$ であり , ①に代入して整理すると ,

$$x^3(x^3 - 2) = 0$$

となり , $(x, y) = (0, 0), (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ を得る . 点 $(0, 0)$ は ③を満たさず , 点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ は ③を満たす . 結局候補点は , $(x, y) = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ のみ . 次に , $f_{xx} = 6x$, $f_y = 3(y^2 - x)$ より ,

$$\Delta = -\frac{f_{xx}}{f_y} = \frac{2x}{x - y^2}.$$

ここで , $\Delta(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}) = -2 < 0$ より , $x = \sqrt[3]{2}$ で極大値 $y = \varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$ を取る .

練習問題. 以下の条件より定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求めよ .

$$(1) x^2 + xy + y^2 = 1,$$

$$(2) x^2 + 2xy - y^2 = -8,$$

$$(3) x^4 - 2y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 1 = 0,$$

$$(4) x^3y^3 + y - x = 0,$$

$$(5) (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2),$$

$$(6) x^4 + y^4 = 4xy,$$

$$(7) x^3 - 6xy + 2y^3 = 0,$$

$$(8) x^4 - 4xy + 3y^2 = 0.$$

(答) (1) $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ で極大値 $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で極小値 $y = \frac{-2}{\sqrt{3}}$.

(2) $x = 2$ で極大値 $y = -2$, $x = -2$ で極小値 $y = 2$.

(3) $x = 0$ で極大値 $y = \frac{1}{2}$, $x = \pm 1$ で極小値 $y = \frac{-3}{2}$.

$$(4) x = \sqrt[5]{9/8} \text{ で極大値 } y = \sqrt[5]{4/27}.$$

$$(5) x = \pm \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \text{ で極大値 } y = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \text{ で極小値 } y = \frac{-1}{2}.$$

$$(6) x = \sqrt[8]{3} \text{ で極大値 } y = \sqrt[8]{27}, x = -\sqrt[8]{3} \text{ で極小値 } y = -\sqrt[8]{27}.$$

$$(7) x = 2 \text{ で極大値 } y = 2.$$

$$(8) x = 1 \text{ で極大値 } y = 1, x = -1 \text{ で極小値 } y = -1.$$