微分積分 2 及び演習　第 14 回演習

第 14 回演習問題：次の追加問題 1,2 です．**(ヒント)** このプリントの例題 1,2 を参考にせよ．

追加問題 1. 次の 3 重積分の値を求めよ．**(答)** $\frac{1}{6}$.

$$\iiint_K x\,dxdydz \qquad K: 2x+y+z \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

追加問題 2. 3 次元極座標を用いて, 次の 3 重積分の値を求めよ．**(答)** 2π.

$$\iiint_K y\,dxdydz \qquad K: x^2+y^2+z^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

例題 1. 次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_K y\,dxdydz \qquad K: x+2y+z \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

(解答例) $x+2y+z \leqq 2$ と $z \geqq 0$ より $\underline{0 \leqq z \leqq 2-x-2y}$. $\therefore 0 \leqq 2-x-2y$, $\therefore y \leqq \frac{2-x}{2}$. また, $y \geqq 0$ より $\underline{0 \leqq y \leqq \frac{2-x}{2}}$. $\therefore 0 \leqq \frac{2-x}{2}$, $\therefore x \leqq 2$. さらに, $x \geqq 0$ より $\underline{0 \leqq x \leqq 2}$. よって, K の条件式を書き直すと

$$K: 0 \leqq x \leqq 2, \quad 0 \leqq y \leqq \frac{2-x}{2}, \quad 0 \leqq z \leqq 2-x-2y$$

となる．この K の表し方により

$$\iiint_K y\,dxdydz = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{2-x}{2}} (\int_0^{2-x-2y} y\,dz)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{2-x}{2}} [\,yz\,]_{z=0}^{z=2-x-2y}\,dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{2-x}{2}} y(2-x-2y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}(2-x) - 2(\frac{y^3}{3}) \right]_{y=0}^{y=\frac{2-x}{2}} dx = \int_0^2 \left(\frac{(2-x)^3}{8} - \frac{2}{3}\frac{(2-x)^3}{8} \right) dx$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^2 (2-x)^3 dx = \frac{1}{24}\left[\frac{1}{-1}\frac{(2-x)^4}{4} \right]_0^2 = -\frac{1}{24}\cdot\frac{0^4-2^4}{4} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \qquad \square$$

定理 (3 重積分の計算法). D を xy 平面上の領域として，xyz 空間内の領域 K が

$$K\colon (x,y) \in D,\ \xi(x,y) \leqq z \leqq \eta(x,y)$$

と表わされるとする．更に, D が縦線領域として

$$D\colon a \leqq x \leqq b,\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)$$

と表わされるとする．この時, K は

$$K\colon a \leqq x \leqq b,\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x),\ \xi(x,y) \leqq z \leqq \eta(x,y)$$

と表され, 次の式が成り立つ：

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{\xi(x,y)}^{\eta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\xi(x,y)}^{\eta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

また, K の体積 V は, 上式で $f(x,y,z)=1$ として，次式で求められる：

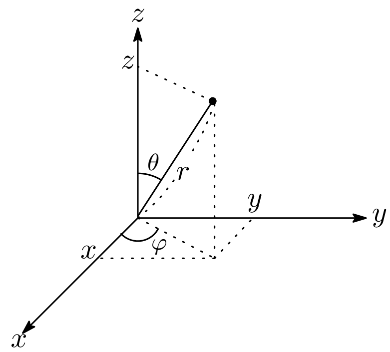
$$V = \iiint_K dxdydz = \iiint_K 1\,dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \{\eta(x,y)-\xi(x,y)\} dy \right) dx$$

例題 2 は裏面にあります

例題 2. 3 次元極座標を用いて, 次の 3 重積分の値を求めよ.

$$\iiint_K x\,dxdydz \qquad K: x^2+y^2+z^2 \leqq 9,\ x \geqq 0$$

(解答例) 直交座標 (x,y,z) と 3 次元極座標 (r,θ,φ) の関係式 (r: 原点からの距離, θ: z 軸からの角, φ: x 軸から反時計回りが正の角) は



$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases} \qquad (r \geqq 0)$$

$x \geqq 0$ をみたす領域は 3 次元極座標で表わせば,

$$r \geqq 0, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$$

なので, K は $r\theta\varphi$ 空間内の領域

$$L\colon 0 \leqq r \leqq 3, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$$

に対応する．ヤコビアンは $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta \geqq 0 \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ なので

$$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

以上, $K \leftrightarrow L$, $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ より

$$\begin{aligned}
&\iiint_K x\,dxdydz = \iiint_L r\sin\theta\cos\varphi\, r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \\
&= \iiint_L r^3\sin^2\theta\cos\varphi\,drd\theta d\varphi = \int_0^3 r^3dr\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi \\
&= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3\left(\int_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta\right)[\sin\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \qquad (\leftarrow \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \text{ に注意}) \\
&= \frac{3^4-0^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^\pi \cdot \{1-(-1)\} = \frac{81}{4}\cdot\frac{1}{2}\{(\pi - \frac{0}{2}) - (0 - \frac{0}{2})\}\cdot 2 = \frac{81\pi}{4}. \qquad \square
\end{aligned}$$

定理 (3 重積分の変数変換). 変数変換 $x = \varphi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$, $z = \zeta(u,v,w)$ により xyz 空間上の領域 K が uvw 空間上の領域 L に対応する時，次の式が成り立つ：

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_L f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\zeta(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

(補足) 定理の状況の下で特に $f(x,y,z) = 1$ の時,

$$\iiint_K dxdydz = \iiint_L \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

が成り立つ．この式を略して次の様に表す事がある：

$$dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$