

微分積分 2 及び演習 第 15 回演習

第 15 回演習問題：次の追加問題 1,2 です。(ヒント) このプリントの例題 1,2 を参考にせよ。

追加問題 1. 次の 3 重積分の値を求めよ。(答) $\frac{1}{6}$.

$$\iiint_K x \, dx \, dy \, dz \quad K : 2x + y + z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

追加問題 2. 3 次元極座標を用いて、次の 3 重積分の値を求めよ。(答) 2π .

$$\iiint_K y \, dx \, dy \, dz \quad K : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$$

例題 1. 次の 3 重積分の値を求めよ.

$$\iiint_K y \, dx \, dy \, dz \quad K : x + 2y + z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

(解答例) $x + 2y + z \leq 2$ と $z \geq 0$ より $0 \leq z \leq 2 - x - 2y$. $\therefore 0 \leq 2 - x - 2y$, $\therefore y \leq \frac{2-x}{2}$. また, $y \geq 0$ より $0 \leq y \leq \frac{2-x}{2}$. $\therefore 0 \leq \frac{2-x}{2}$, $\therefore x \leq 2$. さらに, $x \geq 0$ より $0 \leq x \leq 2$. よって, K の条件式を書き直すと

$$K : 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \frac{2-x}{2}, \quad 0 \leq z \leq 2 - x - 2y$$

となる. この K の表し方により

$$\begin{aligned} \iiint_K y \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{2-x}{2}} \left(\int_0^{2-x-2y} y \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{2-x}{2}} [yz]_{z=0}^{z=2-x-2y} dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{2-x}{2}} y(2-x-2y) dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}(2-x) - 2\left(\frac{y^3}{3}\right) \right]_{y=0}^{y=\frac{2-x}{2}} dx = \int_0^2 \left(\frac{(2-x)^3}{8} - \frac{2}{3} \frac{(2-x)^3}{8} \right) dx \\ &= \frac{1}{24} \int_0^2 (2-x)^3 dx = \frac{1}{24} \left[\frac{1}{-1} \frac{(2-x)^4}{4} \right]_0^2 = -\frac{1}{24} \cdot \frac{0^4 - 2^4}{4} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \quad \square \end{aligned}$$

定理 (3 重積分の計算法). xyz 空間内の領域 K が

$$K : (x, y) \in D, \xi(x, y) \leq z \leq \eta(x, y)$$

と表わされるとする. ここで, D は xy 平面上の領域である. 更に, D が縦線領域として

$$D : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$$

と表わされるとする. この時, K は

$$K : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \xi(x, y) \leq z \leq \eta(x, y)$$

と表され, 次の式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \iiint_K f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iint_D \left(\int_{\xi(x, y)}^{\eta(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\xi(x, y)}^{\eta(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx. \end{aligned}$$

また, K の体積 V は, 上式で $f(x, y, z) = 1$ として

$$V = \iiint_K dx \, dy \, dz = \iiint_K 1 \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \{ \eta(x, y) - \xi(x, y) \} dy \right) dx$$

で求められる.

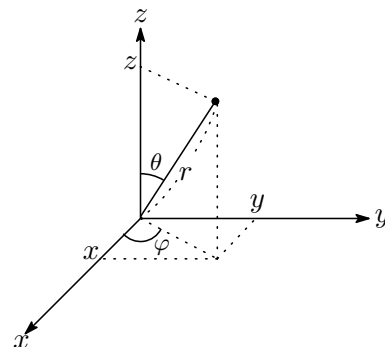
例題 2 は裏面にあります

例題 2. 3次元極座標を用いて, 次の3重積分の値を求めよ.

$$\iiint_K x \, dx \, dy \, dz \quad K : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0$$

(解答例) 直交座標 (x, y, z) と3次元極座標 (r, θ, φ) の関係式 (r : 原点からの距離, θ : z 軸からの角, φ : x 軸から反時計回りが正の角) は

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (r \geq 0)$$



$x \geq 0$ をみたま領域は3次元極座標で表わせば,

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

なので, K は $r\theta\varphi$ 空間内の領域

$$L : 0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

に対応する. ヤコビアンは $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2 \sin \theta \geq 0$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) なので

$$dx \, dy \, dz = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

以上, $K \leftrightarrow L$, $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $dx \, dy \, dz = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$ より

$$\begin{aligned} \iiint_K x \, dx \, dy \, dz &= \iiint_L r \sin \theta \cos \varphi \, r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= \iiint_L r^3 \sin^2 \theta \cos \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^3 r^3 \, dr \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \\ &= \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^3 \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \, d\theta \left[\sin \varphi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad (\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \text{ に注意}) \\ &= \frac{3^4 - 0^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^\pi \cdot \{1 - (-1)\} = \frac{81}{4} \cdot \frac{1}{2} \{(\pi - \frac{0}{2}) - (0 - \frac{0}{2})\} \cdot 2 = \frac{81\pi}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

定理 (3重積分の変数変換). 変数変換 $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \zeta(u, v, w)$ により xyz 空間上の領域 K が uvw 空間上の領域 L に対応する時, 次の式が成り立つ:

$$\iiint_K f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_L f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \zeta(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw$$

(補足) 定理の状況の下で特に $f(x, y, z) = 1$ の時,

$$\iiint_K dx \, dy \, dz = \iiint_L \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw$$

が成り立つ. この式を略して次の様に表す事がある:

$$dx \, dy \, dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw$$