微分積分 2 及び演習　第 12 回演習

第 12 回演習問題：次の追加問題 1,2 を行え．
(ヒント) 下の例題 1,2 を参考にしてみよ．

追加問題 1. 次の変数変換のヤコビアン (ヤコビ行列式) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

$$(1)\quad \begin{cases} x = u - v \\ y = uv \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} x = 2u - v \\ y = -u + 2v \end{cases}$$

追加問題 2. D は点 $(1,0), (0,3), (-1,0), (0,-3)$ を頂点とする菱形の周と内部とする時，次の 2 重積分を 1 次変換を利用して 求めよ．(答) $3(e^3 - e^{-3})$

$$\iint_D (3x+y)^2 e^{-3x+y}\, dxdy$$

例題 1. 次の変数変換のヤコビアン (ヤコビ行列式) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = uv \end{cases}$$

(解答例) ヤコビアン (ヤコビ行列式) は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} = 2u \cdot u - (-2v) \cdot v = 2(u^2 + v^2). \quad \Box$$

例題 2. D は点 $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ を頂点とする xy 平面上の正方形の周と内部とする時，次の 2 重積分を 1 次変換を利用して 求めよ．

$$\iint_D (x+y)^2 e^{x-y}\, dxdy$$

(解答例) 図より D は

$$D\colon x - 1 \leqq y \leqq x + 1,\ -x - 1 \leqq y \leqq -x + 1$$

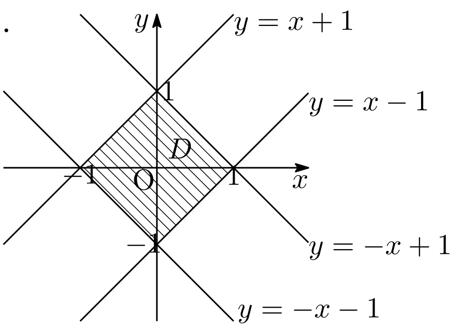
と表される．変形して

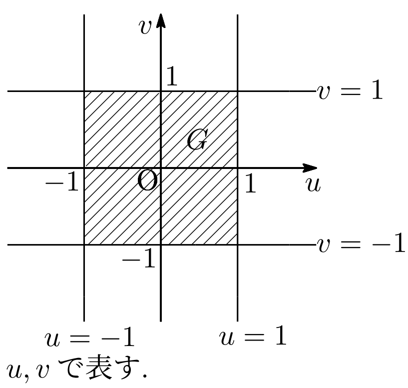
$$D\colon\ -1 \leqq -x + y \leqq 1,\ -1 \leqq x + y \leqq 1$$

となる．ここで，1 次変換 $\boxed{u = -x + y,\ v = x + y}$ すると D は uv 平面上の領域

$$G\colon\ -1 \leqq u \leqq 1,\ -1 \leqq v \leqq 1$$

に対応する．





1 次変換 $\boxed{u = -x + y \cdots ①,\ v = x + y \cdots ②}$ より x, y を u, v で表す．
① + ②より $u + v = 2y,\ \therefore\ y = \frac{1}{2}(u + v)$．① − ②より $u - v = -2x,\ \therefore\ x = \frac{-1}{2}(u - v)$．

$$\therefore \begin{cases} x &= -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ y &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ y &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \end{cases}$$

より，この 1 次変換のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

これより（下の (**補足**) 参照）

$$dxdy = \left|-\frac{1}{2}\right| dudv = \frac{1}{2} dudv$$

以上から ($D \leftrightarrow G,\ x+y=v,\ x-y=-u,\ dxdy = \frac{1}{2}dudv$ に注意して)

$$\begin{aligned}
&\iint_D (x+y)^2 e^{x-y}\, \underline{dxdy} = \iint_G v^2 e^{-u}\, \underline{\frac{1}{2} dudv} \qquad (G\colon\ -1 \leqq u \leqq 1,\ -1 \leqq v \leqq 1) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-1}^{1} v^2 e^{-u}\, du \right\} dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} v^2\, dv \int_{-1}^{1} e^{-u}\, du \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{v^3}{3} \right]_{-1}^{1} \left[\frac{e^{-u}}{-1} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} (\frac{1^3 - (-1)^3}{3}) (\frac{e^{-1} - e}{-1}) = \frac{e - e^{-1}}{3} \quad \square
\end{aligned}$$

定理 (2 重積分の変数変換). 変数変換 $x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v)$ により xy 平面上の領域 D が uv 平面上の領域 G に対応する時，次の式が成り立つ：

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_G f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

(補足) 定理の状況の下で特に $f(x,y) = 1$ の時,

$$\iint_D dxdy = \iint_G \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

が成り立つ．この式を略して次の様に表す事がある：

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$