微分積分 1 及び演習　第 11 回演習

第 11 回演習問題：テキスト p.112〜113 問題 A 1. 全部，p.113 問題 B 1.(1)(2)(5)(7)(8)(9)，テキスト p.116〜117 問題 A 1. 全部，p.117 問題 B 1. 全部です.

(注意) p.112〜113 問題 A 1. と p.116〜117 問題 A 1. は，空欄の所だけでなく教科書の全文を書く事.

(ヒント) p.113 問題 B 1. は p.111〜112 例題 1〜例題 3 と下の例題 1.，p.117 問題 B 1. は p.113〜116 例題 1〜例題 3 とこのプリント裏面の例題 2. を参考にせよ.

部分積分法 p.111 公式 (23.1)

- $\displaystyle\int g(x)\,dx = G(x)+C$ の時，$\displaystyle\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx.$
- $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)+C$ の時，$\displaystyle\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx.$

例題 1. 次の不定積分を求めよ.

$$(1)\ \int (2x+1)e^{3x}\,dx \qquad (2)\ \int e^{2x}\sin x\,dx \qquad (3)\ \int \cos^{-1}x\,dx$$

(解) 部分積分法 p.111 公式 (23.1) を用いる.

(1) $\displaystyle\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}+C$ より，部分積分法を用いて

$$\int(2x+1)e^{3x}\,dx = (2x+1)(\frac{1}{3}e^{3x}) - \int(2x+1)'(\frac{1}{3}e^{3x})\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}(\frac{1}{3}e^{3x}) + C = \frac{1}{3}\{(2x+1)-\frac{2}{3}\}e^{3x}+C = \underline{\frac{1}{9}(6x+1)e^{3x}+C}$$

(2) $\displaystyle I = \int e^{2x}\sin x\,dx$ とおく. $\displaystyle\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}+C$ より，部分積分法を用いて

$$I = \int e^{2x}\sin x\,dx = (\frac{1}{2}e^{2x})\sin x - \int(\frac{1}{2}e^{2x})(\sin x)'\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\left\{(\frac{1}{2}e^{2x})\cos x - \int(\frac{1}{2}e^{2x})(\cos x)'\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x - \frac{1}{4}\int e^{2x}\sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x}(2\sin x - \cos x) - \frac{1}{4}I$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{4}e^{2x}(2\sin x-\cos x) - \frac{1}{4}I, \qquad \therefore\ \frac{5}{4}I = \frac{1}{4}e^{2x}(2\sin x - \cos x) \qquad \therefore\ I = \underline{\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x)+C}$$

(3) $\displaystyle\int 1\,dx = x + C$ より，部分積分法を用いて

$$\int\cos^{-1}x\,dx = \int 1\cdot\cos^{-1}x\,dx = x\cos^{-1}x - \int x(\cos^{-1}x)'\,dx$$

$$= x\cos^{-1}x - \int x(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}})\,dx = x\cos^{-1}x + \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \ \cdots ①$$

ここで，$t = 1-x^2$ とおく. 両辺を x で微分して $\dfrac{dt}{dx} = (1-x^2)' = -2x$. $\therefore\ -\dfrac{1}{2}dt = xdx$ より

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\frac{1}{\sqrt{t}}(-\frac{1}{2}dt) = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}(\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}) + C = -\sqrt{t}+C = -\sqrt{1-x^2}+C \ \cdots ②$$

①②より $\displaystyle\int\cos^{-1}x\,dx = \underline{x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}+C}$

例題 2. は裏面にあります

例題 2. 次の不定積分を求めよ．

$$(1)\ \int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx \qquad (2)\ \int \frac{x+1}{x^2+x-6}\,dx \qquad (3)\ \int \frac{x^2+3x+4}{x+2}\,dx$$

(解) (1) 分母は $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ より $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+3}$ と部分分数分解する．この式の両辺に $(x+1)(x+3)$ を掛けて，$1=A(x+3)+B(x+1)$.

$\therefore\ 1=(A+B)x+3A+B.\ \therefore \begin{cases} A+B=0 \\ 3A+B=1 \end{cases}$ を解いて $A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{2}\log|x+3| + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\log|x+1| - \log|x+3|\right) + C = \underline{\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + C}\end{aligned}$$

(2) 分母は $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ より $\dfrac{x+1}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{x-2}$ と部分分数分解する．この式の両辺に $(x+3)(x-2)$ を掛けて，$x+1=A(x-2)+B(x+3)$.

$\therefore\ x+1=(A+B)x-2A+3B.\ \therefore \begin{cases} A+B=1 \\ -2A+3B=1 \end{cases}$ を解いて $A=\frac{2}{5},\ B=\frac{3}{5}$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x+3)(x-2)}\,dx &= \frac{2}{5}\int \frac{1}{x+3}\,dx + \frac{3}{5}\int \frac{1}{x-2}\,dx = \frac{2}{5}\log|x+3| + \frac{3}{5}\log|x-2| + C \\ &= \frac{1}{5}\left(\log|x+3|^2 + \log|x-2|^3\right) + C = \underline{\frac{1}{5}\log|(x+3)^2(x-2)^3| + C}\end{aligned}$$

(3) 被積分関数の分子 (x^2+3x+4) の次数は 2，分母 $(x+2)$ の次数は 1 なので整式の割り算が実行できて，$x^2+3x+4=(x+2)(x+1)+2$ （商が $(x+1)$，余りが 2）より

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+3x+4}{x+2}\,dx &= \int \frac{(x+2)(x+1)+2}{x+2}\,dx = \int \left\{(x+1)+\frac{2}{x+2}\right\} dx \\ &= \int (x+1)\,dx + 2\int \frac{1}{x+2}\,dx = \underline{\frac{x^2}{2} + x + 2\log|x+2| + C}\end{aligned}$$