## 完全微分方程式の解法 (テキスト p.52–53)

準備として偏積分について説明しておく．$f(x,y)$ を既知関数として，$U=U(x,y)$ を未知関数とする偏微分方程式 $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=f(x,y)\cdots$(I) の一般解を $U=\int f(x,y)\,dx$ で表し $f(x,y)$ の“ $x$ 偏積分 ”と言う．同様に，偏微分方程式 $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=f(x,y)\cdots$(II) の一般解を $U=\int f(x,y)\,dy$ で表し $f(x,y)$ の“ $y$ 偏積分 ”と言う．また，ある関数 $g(x,y)$, $h(x,y)$ について，

$$g(x,y) \text{ が (I) の一つの解} \iff \int f(x,y)\,dx = g(x,y)+K(y) \qquad (K(y) \text{ は } y \text{ の任意関数})$$

$$h(x,y) \text{ が (II) の一つの解} \iff \int f(x,y)\,dy = h(x,y)+L(x) \qquad (L(x) \text{ は } x \text{ の任意関数})$$

p.52–53 の解法に従って，p.73 演習 **2.1**(1)(2)(3) を解いてみる．

p.73 演習 **2.1**(1)　$(3x^2+2xy^3)dx+(3x^2y^2+8y^3)dy=0\ \cdots$ ①

**(解)** $P=3x^2+2xy^3$，$Q=3x^2y^2+8y^3$ と置くと

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6xy^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=6xy^2 \qquad\quad \therefore \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

よって，① は完全微分形であり，ポテンシャル $U=U(x,y)$ が存在する．

ポテンシャル $U=U(x,y)$ を求める．ポテンシャル $U$ は次を満たす:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P\cdots ② \qquad\qquad \frac{\partial U}{\partial y}=Q\cdots ③$$

② より

$$U=\int \frac{\partial U}{\partial x}\,dx=\int(3x^2+2xy^3)\,dx=x^3+x^2y^3+K(y)\cdots ④$$

④ より，$\frac{\partial U}{\partial y}=3x^2y^2+K'(y)\cdots$ ⑤．③ ⑤ より，$3x^2y^2+K'(y)=3x^2y^2+8y^3$．$\therefore K'(y)=8y^3$．$\therefore K(y)=\int 8y^3\,dy=2y^4+C_0$ ($C_0$：任意定数)．ポテンシャルは ④ より，$U=x^3+x^2y^3+2y^4+C_0$．

① の一般解は，$U=C$ ($C$：任意定数) であるから，$x^3+x^2y^3+2y^4+C_0=C$．ここで $C-C_0$ を改めて $C$ とおいて，$x^3+x^2y^3+2y^4=C$．

p.73 演習 **2.1**(2)　$(y-x\sqrt{x^2+y^2}\,)dx+(x-y\sqrt{x^2+y^2}\,)dy=0\ \cdots$ ①

**(解)** $P=y-x\sqrt{x^2+y^2}$，$Q=x-y\sqrt{x^2+y^2}$ と置くと

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1-x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2y=1-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1-y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2x=1-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\therefore \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$．よって，① は完全微分形であり，ポテンシャル $U=U(x,y)$ が存在する．

ポテンシャル $U=U(x,y)$ を求める．ポテンシャル $U$ は次を満たす:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P\cdots ② \qquad\qquad \frac{\partial U}{\partial y}=Q\cdots ③$$

② より

$$U=\int \frac{\partial U}{\partial x}\,dx=\int(y-x\sqrt{x^2+y^2}\,)\,dx=yx-\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+K(y)\cdots ④$$

④ より $\frac{\partial U}{\partial y}=x-y\sqrt{x^2+y^2}+K'(y)\cdots$ ⑤．③ ⑤ より，$x-y\sqrt{x^2+y^2}+K'(y)=x-y\sqrt{x^2+y^2}$．$\therefore K'(y)=0$．$\therefore K(y)=C_0$ ($C_0$：任意定数)．ポテンシャルは ④ より，$U=xy-\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+C_0$．

① の一般解は，$U=C$ ($C$：任意定数) であるから，$xy-\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+C_0=C$．ここで $C-C_0$ を改めて $C$ とおいて，$xy-\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=C$．

**(補足)** ④を得る際，$x$ 偏積分 $\int(y - x\sqrt{x^2+y^2}\,)\,dx$ の計算が必要となるが，$y$ を定数と考えて $x$ について不定積分を求めればよい．但し，積分定数に当たるは $y$ の任意関数となる．$t = x^2 + y^2$ と置くと，$\frac{dt}{dx} = 2x$ より，$dx = \frac{dt}{2x}$ となるから

$$\begin{aligned}\int(y - x\sqrt{x^2+y^2}\,)\,dx &= yx - \int x\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{2x} = yx - \frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt \\ &= yx - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + K(y) = yx - \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} + K(y)\end{aligned}$$

p.73 演習 **2.1**(3)　$(1+xy)e^{xy}dx + (x^2e^{xy} + e^y)dy = 0 \ \cdots$ ①
**(解)** $P = (1+xy)e^{xy}$，$Q = x^2e^{xy} + e^y$ と置くと，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = xe^{xy} + (1+xy)e^{xy}x = (2x + x^2y)e^{xy}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xe^{xy} + x^2e^{xy}y \qquad \therefore \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

よって，①は完全微分形であり，ポテンシャル $U = U(x,y)$ が存在する．
　ポテンシャル $U = U(x,y)$ を求める．ポテンシャル $U$ は次を満たす:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \cdots ② \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q \cdots ③$$

②より

$$\begin{aligned}U &= \int\frac{\partial U}{\partial x}\,dx = \int(1+xy)e^{xy}\,dx = \int(1+xy)\left(\frac{e^{xy}}{y}\right)_x dx \\ &= (1+xy)\frac{e^{xy}}{y} - \int(1+xy)_x\frac{e^{xy}}{y}\,dx = (1+xy)\frac{e^{xy}}{y} - \int e^{xy}\,dx = xe^{xy} + K(y) \cdots ④\end{aligned}$$

④ より，$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2e^{xy} + K'(y) \cdots$ ⑤．③ ⑤ より，$x^2e^{xy} + K'(y) = x^2e^{xy} + e^y$．$\therefore K'(y) = e^y$．$\therefore K(y) = \int e^y\,dy = e^y + C_0$ ($C_0$：任意定数)．ポテンシャルは ④ より，$U = xe^{xy} + e^y + C_0$．
　①の一般解は，$U = C$ ($C$：任意定数) であるから，$xe^{xy} + e^y + C_0 = C$．ここで $C - C_0$ を改めて $C$ とおいて，$xe^{xy} + e^y = C$．
**(別解)** ポテンシャル $U = U(x,y)$ を別の方法で求めてみる．

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \cdots ② \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q \cdots ③$$

③より

$$U = \int\frac{\partial U}{\partial y}\,dy = \int(x^2e^{xy} + e^y)\,dy = xe^{xy} + e^y + L(x) \cdots ④$$

④より，$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + L'(x) \cdots$ ⑤．②⑤より $e^{xy} + xye^{xy} + L'(x) = (1+xy)e^{xy}$．$\therefore L'(x) = 0$．$\therefore L(x) = C_0$ ($C_0$：任意定数)．ポテンシャルは ④ より，$U = xe^{xy} + e^y + C_0$．